

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky

Diplomová práce

VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra aplikované mechaniky

Aplikace fotoelasticimetrických metod
Application Methods in Photoelasticity

Student: Bc. Zbyněk Paška
Vedoucí diplomové práce: Ing. František Fojtík, Ph.D.
Konzultant: Ing. Petr Ferfecki, Ph.D.

Ostrava 2015

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Zbyněk Paška**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Aplikace fotoelasticimetrických metod**
Application Methods in Photoelasticity

Zásady pro vypracování:

- 1: Nalezení vhodné metodiky zpracování obrazu izoklinových a izochromatických čar.
- 2: Aplikace metody rozdílu smykových napětí.
- 3: Aplikace získaných poznatků na konkrétním příkladu a srovnání s výpočtem.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] MACURA, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě. VŠB-TU Ostrava 2001, ISBN 80-7078-934-4.
- [2] MACURA, P.: Sbírka úloh z experimentální pružnosti. VŠB-TU Ostrava, 2008, ISBN 978-80-248-1823-8.
- [3] ASUNDI, A., K.: MATLAB for Photomechanics - A Primer, Elsevier, 2002, ISBN 0-08-044050-9.
- [4] TREBUŇA, F.; ŠIMČÁK, F.: Princípy, postupy, přístroje v metode photostress, Edícia odbornej a vedckej literatúry, Technická univerzita v Košiciach, 2006, Slovensko, ISBN 80-8073-670-7.
- [5] MILBAUER, M.: Fotoelasticimetrie a její použití v praxi, SNTL, Praha, 1953.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. František Fojtík, Ph.D.**

Datum zadání: 13.12.2014

Datum odevzdání: 18.05.2015



doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.
vedoucí katedry



doc. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 18. 5. 2015

Be. Zmík Ruka
.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 - školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněná v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě:18.5.2015.....

Bc. Zbyněk Paška
.....
podpis

Jméno a příjmení autora práce:

Bc. Zbyněk Paška

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Karolinka
Úzká 585, 756 05
okr. Vsetín

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

PAŠKA, Z. *Aplikace fotoelasticimetrických metod: diplomová práce*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2015, 61 s. Vedoucí práce: Fojtík, F.

Diplomová práce se zabývá analýzou pole napětí u vybraných modelů pomocí metody fotoelasticimetrie. K tomuto účelu byl vytvořen program pro automatické zpracování izochromatických a izoklinných křivek, získaných z fotoelasticimetrického měření. Pomocí programu a metody rozdílu smykových napětí jsou analyzovány modely prstence a kruhového disku, které jsou na vnějším obvodu zatíženy centrickou silou. Dále je řešen model tvarového nosníku namáhaný ohybem. Výsledkem analýzy jsou složky tenzoru napětí určené na celé ploše vzorku. Výsledky jsou pro některá místa modelů porovnány s numerickým řešením. Model kruhového disku je řešen také analyticky. Numerické řešení MKP je provedeno v programu Patran.

ANNOTATION OF MASTER THESIS

PAŠKA, Z. *Application Methods in Photoelasticity: Master Thesis*. Ostrava: VŠB - Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2015, 61 p. Thesis head: Fojtík, F.

Master thesis is focussing on stress analysis in some selected specimens via photoelasticity method. A program for automatic processing of the isochromatics and isoclinics fringes is performed. Fringes were obtained from the photoelasticity measurement. This program with the shear stress difference method was used for analysis thin annular disc and disc subjected to a diametral compressive load. There was also shown solution of shape beam subjected to a bending force. Results of the analysis are stress tensor's components on overall area of the specimen. The results obtained from experimental and numerical solution were compared in some chosen locations for all the specimens. For the thin disc analytical approach was also used. Numerical solving is performed in Patran software.

OBSAH

	SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČENÍ.....	8
	ÚVOD	10
1	HISTORIE A SOUČASNÝ VÝVOJ FOTOELASTICIMETRIE.....	11
2	FYZIKÁLNÍ ZÁKLADY FOTOELASTICIMETRIE.....	12
2.1	SVĚTLO.....	12
2.2	POLARIZACE	13
2.3	DOČASNÝ DVOJLOM	14
2.4	MATEMATICKÝ POPIS FOTOELASTICIMETRIE	14
2.5	KONSTANTA OPTICKÉ CITLIVOSTI	16
2.6	JONESŮV VÝPOČET INTENZITY SVĚTLA	17
2.7	POLARISKOP PRO ROVINNOU POLARIZACI.....	18
2.8	POLARISKOP PRO KRUHOVOU POLARIZACI	20
2.9	SEPARACE NAPĚTÍ.....	22
3	POČÍTAČOVÉ ZPRACOVÁNÍ FOTOELASTICIMETRICKÝCH SNÍMKŮ	25
3.1	STRUKTURA VYHODNOCOVACÍHO PROGRAMU.....	27
3.2	EXPERIMENTÁLNÍ ŘEŠENÍ DISKU A TVAROVÉHO NOSNÍKU	37
4	VÝPOČETNÍ ŘEŠENÍ PRSTENCE A KRUHOVÉHO DISKU METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ	41
4.1	MKP ANALÝZA TVAROVÉHO NOSNÍKU.....	43
5	ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ DISKU ZATÍŽENÉHO CENTRICKOU SILOU	45
6	POROVNÁNÍ EXPERIMENTÁLNÍHO ŘEŠENÍ S VÝPOČTEM	48
7	ZÁVĚR.....	51
8	POUŽITÁ LITERATURA	54
9	SEZNAM PŘÍLOH.....	57

SEZNAM POUŽITÝCH ZNAČENÍ

C	Fotoelasticimetrická konstanta	$\text{mm}^2 \text{N}^{-1}$
D	Průměr modelu disku	mm
E	Modul pružnosti v tahu	MPa
F	Síla	N
I_a	Intenzita světla dopadajícího na analyzátor	W m^{-2}
I_d	Intenzita světla u polariskopu s tmavým polem	W m^{-2}
I_ℓ	Intenzita světla u polariskopu se světlým polem	W m^{-2}
I_p	Intenzita světla u polariskopu pro rovinnou polarizaci	W m^{-2}
a	Vzdálenost působíště síly od podpory	mm
b	Šířka tahové epruvety	mm
c	Rychlost světla ve vakuu	m s^{-1}
h	Výška nosníku	mm
i	Pořadové číslo	—
j	Imaginární jednotka	—
k^c	Konstanta optické citlivosti modelové hmoty	N mm^{-1}
l	Vzdálenost podpor	mm
m	Relativní dvojlom, řád izochromatické čáry	—
n	Index lomu	—
t	Skutečná tloušťka modelu	mm
Δx	Velikost kroku ve směru osy x	mm
Δy	Velikost kroku ve směru osy y	mm
$\Delta \tau_{xy}$	Rozdíl smykového napětí	MPa
τ_{xy}	Smykové napětí v rovině xy	MPa
α	Úhel natočení polarizačních rovin polarizátorů	deg
δ	Fázový rozdíl, zpoždění	—
θ_B	Brewsterův úhel	deg
θ_1, θ'_1	Úhel dopadu a odrazu	deg
λ	Vlnová délka použitého světla	nm
μ	Poissonovo číslo	—
π	Ludolfovo číslo	—
σ	Normálové napětí	MPa
σ_{red}	Redukované napětí	MPa
σ_T	Tečné napětí na volném obrysu modelu	MPa
σ_x, σ_y	Normálové napětí ve směru osy x a osy y	MPa
σ_1, σ_2	Hlavní napětí	MPa

$(\sigma_1 - \sigma_2)$	Rozdíl hlavních napětí odpovídající řádu izochromatické čáry	MPa
φ_1, φ_2	Fázový rozdíl, fázový posun	rad
ω	Úhlová frekvence	rad s ⁻¹

ÚVOD

Fotoelasticimetrie patří k důležitým metodám experimentální mechaniky již po velmi dlouhou dobu. Počátek jejího vývoje lze položit do roku 1816, kdy David Brewster objevuje existenci dočasného dvojzlomu v mechanicky zatížené skleněné desce. Fotoelasticimetrie nachází uplatnění při vyšetřování napětí v některých průsvitných materiálech. Je použitelná pro analýzu rovinných i prostorových úloh. Napětí mohou být způsobena vnějším zatížením, nebo technologickým zpracováním. Využívá polarizované světlo a jeho vlastnosti, které se projevují při průchodu modelem mající jistou úroveň napětí. Fotoelasticimetrie v současné době zažívá svůj další vývoj. S rozvojem počítačové techniky se rozvíjela i metodika fotoelasticimetrie dnes nazývaná digitální fotoelasticimetrie. Jsou vytvářeny nové postupy, které využívají moderní optické přístroje a zdroje světla.

Práce se zabývá problematikou rovinné transmisní fotoelasticimetrie. Měření se uskutečnilo v laboratořích Ústavu pružnosti a pevnosti na VŠB - TU v Ostravě. Při měření se využíval polariskop pro kruhovou a pro rovinnou polarizaci světla. Výstupem měření jsou tzv. křivky izochromatické a izoklinné, které charakterizují napjatost uvnitř tělesa. Hlavním cílem práce bylo vytvořit počítačové algoritmy pro zpracování snímků izochromatických a izoklinných pruhů. Postup vyhodnocení popsán v práci [1] probíhá v prostředí programu MATLABu pomocí vytvořených výpočetních postupů. Algoritmizována metoda rozdílů smykových napětí umožní zjistit složky napětí na povrchu celého rovinného tělesa, což by klasickým ručním přístupem bylo značně složité a pracné.

Vytvořený program byl otestován na třech součástech. Model prstence a model plného disku byly upnuty v zatěžujícím rámu a na svém vnějším obvodu zatíženy tlakovou silou, jejíž nositelka prochází středem modelů. Velikost síly byla změřena pro provedení numerického řešení metodou MKP. Posledním modelem byl nosník složitějšího tvaru, který byl zatížen ohybovým momentem. Rozměry všech třech modelů a poloha řezů jsou uvedeny na obr. 3.2 a obr. 3.3. V závěru práce je uvedeno srovnání výsledků experimentálního a numerického řešení pro vybrané řezy. Model kruhového disku byl řešen také analyticky. V prvních kapitolách diplomové práce je uveden krátký přehled o vývoji fotoelasticimetrie, její fyzikální podstata a matematický popis jednotlivých optických prvků polariskopu. Pomocí maticového počtu je stanovena intenzita světla pro polariskop s přímkově a kruhově polarizovaným světlem.

1 HISTORIE A SOUČASNÝ VÝVOJ FOTOELASTICIMETRIE

Po Brewsterovu objevu formuluje roku 1841 Neumann zákon o vztahu mezi napětím a optickými jevy. Ten je později upraven Maxwellem. Pro pozorování fotoelasticimetrických jevů bylo v této době hojně využíváno sklo. Praktické aplikace rovinných úloh jsou uskutečněny až na přelomu 19. a 20. století Mesnagerem, Cokerem a Filonem. Coker používal k pozorování opticky citlivější celuloid a monochromatické světlo. Prostorový problém pomocí fotoelasticimetrie vyřešil až Oppel v roce 1935 [2], [3].

Fotoelasticimetrickým metodám se věnovalo mnoho autorů. Mezi nejznámější patří Filon, Hetényi, Frocht, Tesař, Odink, Knoll a další [3]. Česky psaná literatura pochází od Milbauera. Na Slovensku je významným autorem prof. Trebuňa, jehož publikace se věnují i metodě photostress. Fotoelasticimetrie se z povahy řešených problémů dělí do třech skupin [4]:

- ❖ rovinná fotoelasticimetrie,
- ❖ prostorová fotoelasticimetrie,
- ❖ reflexní fotoelasticimetrie.

Reflexní fotoelasticimetrie byla vytvořena Mesnagerem ve 30. letech 20. století. Metoda zpočátku narážela na absenci vhodných lepidel a optických vrstev. Výrazně zdokonalená byla Dr. Felixem Zandmanem o 30 let později. Uplatňuje se při zkoumání deformací a napětí na skutečných strojních součástech. Na součást se nalepí opticky citlivá vrstva a přes reflexní polariskop je možné sledovat interferenční pruhy [5].

Přibližně od poloviny 20. století se začala plně vyvíjet metoda konečných prvků, která se však svých praktických aplikací dočkala až po roce 1970 [6]. Tento vývoj výrazným způsobem ovlivnil používání fotoelasticimetrie. Nicméně vývoj počítačů a možnost vytvářet algoritmy pro zpracování informací z fotoelasticimetrického zkoumání, měl za následek znovuoživení této experimentální metody pod názvem digitální fotoelasticimetrie [7].

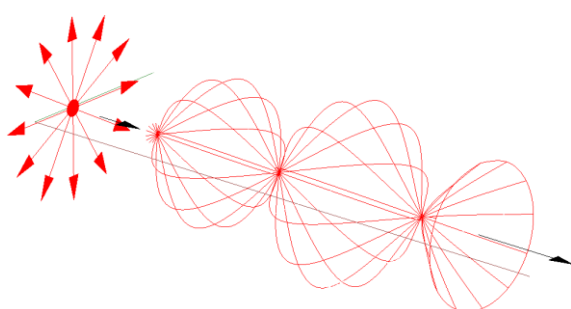
Nejznámější odborníci, kteří se této problematice v poslední době věnují, jsou např. prof. K. Ramesh, prof. F. Trebuňa a prof. E. Patterson [8]. Používají se polariskopy pro přímkovou i kruhovou polarizaci. Zaznamenává se intenzita světla pro různé kombinace polarizátoru a analyzátoru. Počet obrazů se v závislosti na konkrétním algoritmu může lišit [9]. Digitální fotoelasticimetrie je schopna vyhodnotit napětí na celém povrchu vzorku. V současné době patří spolu s reflexní metodou mezi často používané optické metody v experimentální mechanice.

2 FYZIKÁLNÍ ZÁKLADY FOTOELASTICIMETRIE

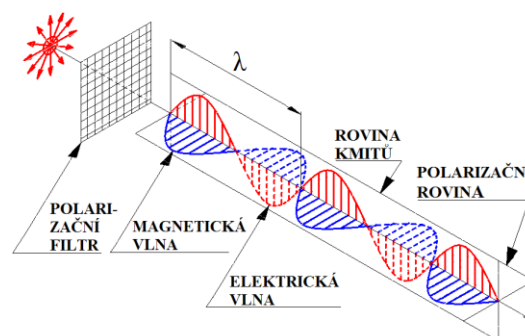
Fotoelasticimetrie využívá pro kvantifikaci napětí v průsvitných tělesech polarizované světlo a jev nazývaný dočasný dvojlom. Dvojlom vzniká jen v některých materiálech, jako reakce na mechanické zatížení [4].

2.1 SVĚTLO

J. C. Maxwell dokázal, že světlo je elektromagnetické vlnění, které se šíří přímočaře a kmitá ve všech rovinách obsahující směr šíření světla (obr. 2.1). Polarizované světlo o vlnové délce λ se skládá z elektrické a magnetické složky (viz obr. 2.2) [10].

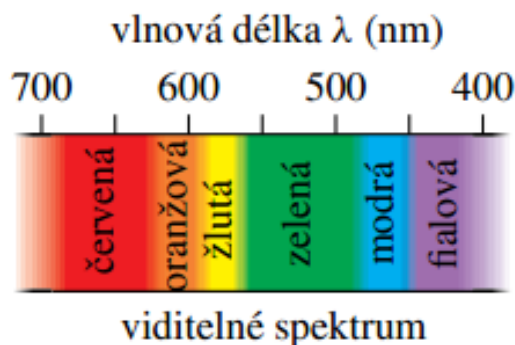


obr. 2.1 Nepolarizovaný světelný paprsek.



obr. 2.2 Polarizované světlo.

Světlo se vyznačuje korpuskulárně vlnovým dualismem. Lze jej chápat jako proud částic (fotonů), nebo také jako vlnění [11]. K vysvětlení jevů ve fotoelasticimetrii se využívá vlnových vlastností světla. Spektrum elektromagnetických vln začíná u tzv. dlouhých vln s vlnovou délkou řádově 10^8 m, pokračuje přes vlny rozhlasové, infračervené, ultrafialové, rentgenové a končí u kosmického záření s vlnovou délkou cca 10^{-16} m. Oblast viditelného spektra je přibližně v rozmezí od 430 nm do 690 nm [10].

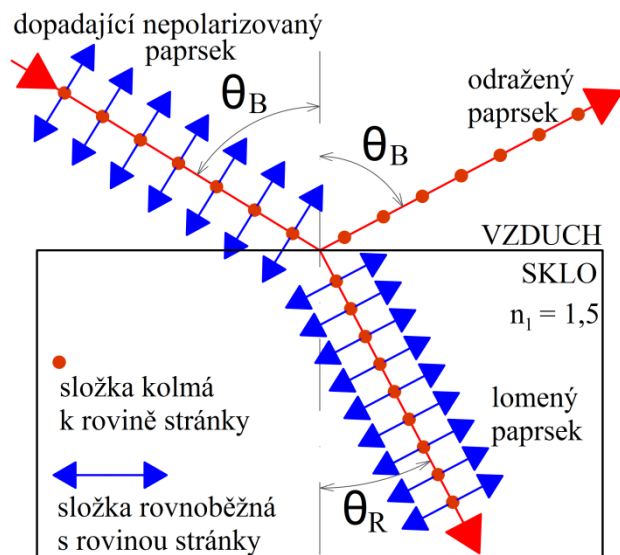


obr. 2.3 Spektrum viditelného světla (převzato z [10]).

Rychlost světla ve vakuu c je $299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$. V jakémkoliv jiném prostředí je rychlost menší a je dána poměrem rychlosti ve vakuu a indexu lomu prostředí [11].

2.2 POLARIZACE

Fotoelasticimetrie využívá polarizované světlo. Na obr. 2.4 lze vidět polarizaci světla odrazem. K úplné polarizaci dojde, jestliže dopadající paprsek svírá se svislicí Brewsterův úhel θ_B . Lomený paprsek svírá se svislicí úhel θ_R [10].



obr. 2.4 Polarizace světla odrazem [10].

Polarizované světlo lze získat v zásadě třemi způsoby [4]:

- ❖ polarizací odrazem,
- ❖ polarizací lomem,
- ❖ polarizací dvojlomem.

K polarizaci světla se ve fotoelasticimetrii využívá polarizačních filtrů. Průchodem světelného paprsku polaroidem dojde k usměrnění kmitů světla do jedné roviny, která se nazývá rovinou kmitů. Rovina kmitů je kolmá k polarizační rovině polarizátoru (viz obr. 2.2) [4].

Široké použití ve fotoelasticimetrii má především přímkově a kruhově polarizované světlo, které je speciálním případem elipticky polarizovaného světla [4]. U eliptické a kruhové polarizace je možné rozeznávat polarizaci levotočivou a pravotočivou (pohyb proti směru hodinových ručiček) [9].

Polarizační filtry jsou nejčastěji vyrobeny z polyvinyl alkoholu (PVA) s příměsí jódu [12].

2.3 DOČASNÝ DVOJLOM

Dočasný dvojlom vzniká při zatížení jen v některých průhledných nebo průsvitných materiálech. V nezatíženém stavu jsou tyto materiály opticky izotropní. Rychlost šíření světla uvnitř součásti je v každém směru stejná. Historicky prvním použitým materiálem bylo sklo, které má malou optickou citlivost a již při malém zatížení praská. Zjišťování větších velikostí napětí pak není možné. Dnes jsou již k dispozici opticky citlivější materiály (perspex, celuloid, guma, CR 39, plexiglas a různé pryskyřice) [3].

Po zatížení se tyto materiály stanou opticky anizotropní. Chovají se jako materiály krystalické, přestože se jedná o materiály amorfni. Jestliže paprsek prochází zatíženým modelem, rozloží se na dvě vzájemně kolmé složky do směrů hlavních napětí. Zde se uplatňuje zákon Wertheimův, který ve stručnosti říká, že závislost dočasného dvojlomu na rozdílu hlavních napětí je lineární. U modelových hmot je tedy požadována lineární charakteristika [3], [4].

2.4 MATEMATICKÝ POPIS FOTOELASTICIMETRIE

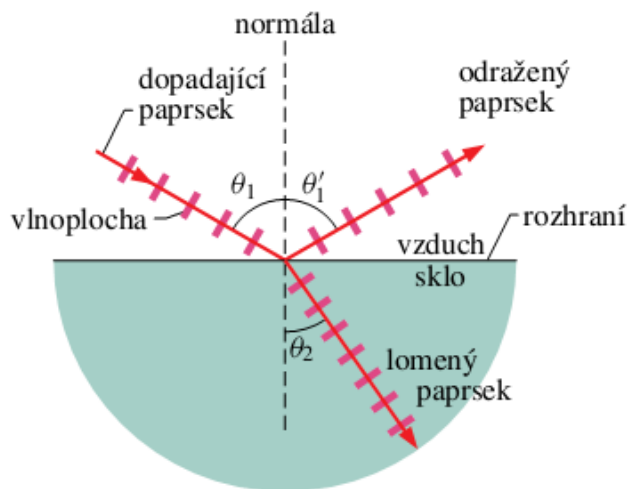
Prochází-li světlo povrchem, který rozděluje dvě různá prostředí, dojde k lomu a odrazu světla. Zákon odrazu říká, že úhel odrazu θ'_1 je roven úhlu dopadu θ_1 [10]:

$$\theta'_1 = \theta_1. \quad (2.1)$$

Zákon lomu říká, že lomený paprsek leží v rovině dopadu a je vyjádřen Snellovým zákonem [10]:

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1, \quad (2.2)$$

kde n_1, n_2 jsou indexy lomu, θ_2 je úhel lomu (viz obr. 2.5).



obr. 2.5 Odraz a lom světelného paprsku
(převzato z [10]).

Index lomu n_i je určen poměrem rychlosti světla ve vakuu k rychlosti šíření v daném prostředí:

$$n_i = \frac{c}{v_i}. \quad (2.3)$$

Paprsek světla dopadá na dvojrozměrný model z opticky citlivého materiálu. V nezatíženém stavu má model index lomu n . Po zatížení se světlo rozloží do směrů dvou hlavních napětí σ_1 , σ_2 a je možné definovat indexy lomu n_1 a n_2 . Maxwell dokázal, že mezi indexy lomu a napětími platí následující vztahy [13]:

$$\begin{aligned} n_1 - n &= c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2, \\ n_2 - n &= c_1 \sigma_2 + c_2 \sigma_1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde c_1 a c_2 jsou optické koeficienty v přímém a příčném směru.

Pokud paprsek světla dopadá na rovinu modelu kolmo, rozloží se do směrů hlavních napětí a tyto složky projdou modelem různými rychlostmi. Fázový rozdíl δ pak lze vyjádřit [13]:

$$\delta = \frac{2 \pi t}{\lambda} (n_2 - n_1), \quad (2.5)$$

kde t značí tloušťku modelu.

Dosazením z rovnice (2.4) do rovnice (2.5) se zpoždění vyjádří následovně:

$$\delta = \frac{2 \pi t}{\lambda} (c_2 - c_1) (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (2.6)$$

Zavedením fotoelasticimetrické konstanty $C = (c_2 - c_1)$, lze rovnici přepsat:

$$\delta = \frac{2 \pi t}{\lambda} C (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (2.7)$$

Pro řád m izochromatické křivky platí [9]:

$$m = \frac{\delta}{2 \pi}. \quad (2.8)$$

Na základě vztahu (2.8) je možno rovnici (2.7) přepsat následovně:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{m k^c}{t}, \quad (2.9)$$

kde

$$k^c = \frac{\lambda}{C} \quad (2.10)$$

je konstanta optické citlivosti udávaná v jednotkách N mm^{-1} . Pro daný materiál ji lze stanovit pomocí kalibračního měření.

Rovnice (2.9) je známá pod anglickým označením „stress – optic law“. Udává lineární závislost mezi napětíovým stavem a optickými veličinami. Při vysokých hodnotách napětí je závislost nelineární a vztah (2.9) nelze použít [9].

2.5 KONSTANTA OPTICKÉ CITLIVOSTI

Konstanta optické citlivosti je vyjádřena z rovnice (2.9):

$$k^c = \frac{t}{m} (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (2.11)$$

Pokud se stanoví velikost rozdílu hlavních napětí a hodnota relativního dvojlomu m v daném bodě modelu, pak lze tuto konstantu určit. Relativní dvojlom je určen řádem izochromatické křivky. Každý fotoelasticimetrický materiál má konstantu optické citlivosti jinou. Např. podle druhu skla se pohybuje v rozmezí od 196 do 490 N mm⁻¹ u monomerů v rozmezí cca od 10 do 20 N mm⁻¹ [3]. Ke stanovení konstanty optické citlivosti se nejčastěji používají tři způsoby:

Tahová epruveta

Tahová epruveta je na obr. 2.6. V určitém místě epruvety se sleduje velikosti relativního dvojlomu a velikost síly, která jej způsobila. Pro hlavní napětí a konstantu optické citlivosti platí [4]:

$$\sigma_1 = \frac{F}{b t}, \quad \sigma_2 = 0, \quad k^c = \frac{F}{b m}. \quad (2.12)$$

Nosník zatížený čistým ohybem

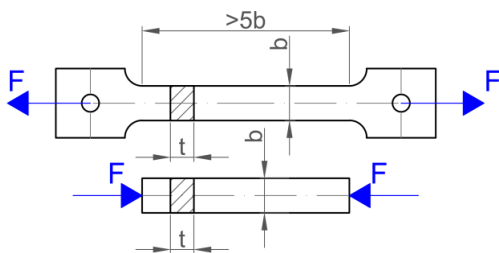
Nosník je znázorněn na obr. 2.7. Hlavní napětí a konstanta optické citlivosti nabývají velikosti [14]:

$$\sigma_1 = \sigma_o = \frac{6 F a}{t h^2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad k^c = \frac{6 F a}{m h^2}. \quad (2.13)$$

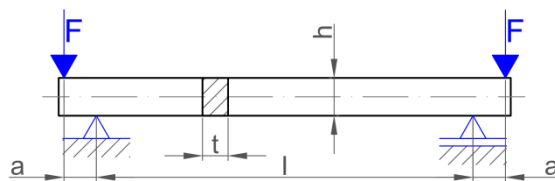
Stlačovaný kruhový disk

Používaný kruhový disk je na obr. 2.8. Hlavní napětí ve středu disku a výsledná konstanta optické citlivosti jsou uvedeny v rovnici (2.14) [14]:

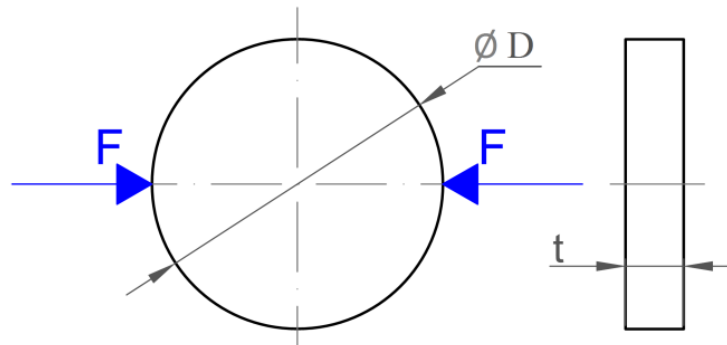
$$\sigma_1 = \frac{2 F}{\pi D t}, \quad \sigma_2 = -\frac{6 F}{\pi D t}, \quad k^c = \frac{8 F}{\pi D m}. \quad (2.14)$$



obr. 2.6 Tahová epruveta.



obr. 2.7 Ohýbaný nosník.



obr. 2.8 Stlačovaný kruhový disk.

2.6 JONESŮV VÝPOČET INTENZITY SVĚTLA

Pomocí Jonesova maticového počtu je možné určit světelnou intenzitu při různém uspořádání optických prvků v polariskopu. Každý optický člen je charakterizován svojí polohou (úhlem natočení optické osy vůči referenčnímu souřadnému systému) a zpožděním, které do soustavy zavádí [9]. Výpočet intenzity světla pomocí Jonesového počtu je uveden např. v literatuře [9], a [15]. Složky světelného vektoru E'_x , E'_y v natočené souřadné soustavě o úhel α lze vyjádřit takto:

$$\begin{Bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix}, \quad (2.15)$$

kde E_x , E_y značí složky světelného vektoru v referenčním souřadném systému.

Pro složky světelného vektoru E_x a E_y platí:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{mx} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_{my} \cos(\omega t + \varphi_2) \end{Bmatrix}, \quad (2.16)$$

kde E_{mx} a E_{my} označuje amplitudy jednotlivých složek, ω je úhlová frekvence, t je čas, φ_1 a φ_2 jsou fázová posunutí.

Pokud složka E_x odpovídá tzv. pomalé ose optického členu, pak je možno složky vektoru v pootočené souřadné soustavě vyjádřit výrazem:

$$\begin{Bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{mx} \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{\delta}{2}\right) \\ E_{my} \cos\left(\omega t + \varphi_1 + \frac{\delta}{2}\right) \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

Využitím zápisu pomocí funkce komplexní proměnné:

$$\begin{Bmatrix} E'_x \\ E'_y \end{Bmatrix} = \Re \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{\delta}{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{mx} e^{j\varphi_1} \\ E_{my} e^{j\varphi_2} \end{Bmatrix} e^{j\omega t}. \quad (2.18)$$

Člen, který způsobuje natočení složek světelného vektoru a jejich zpoždění, je reprezentován zápisem:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-j\frac{\delta}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

První matice na pravé straně rovnice (2.19) provede přetransformování zpět do referenčního souřadného systému. Po roznásobení se získá výsledná matice:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos(2\alpha) & -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(2\alpha) \\ -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin(2\alpha) & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)\cos(2\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Polarizátor

Polarizátor, jehož optická osa je orientována svisle pod úhlem $\alpha = 90^\circ$, je reprezentován vektorem:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Čtvrtvlnová deska

Čtvrtvlnová deska způsobuje zpoždění $\delta = \frac{\pi}{2}$. Jestliže je její pomalá osa orientována pod úhlem $\alpha = 135^\circ$, po dosazení do rovnice (2.20) se získá:

$$\mathbf{Q}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Pro čtvrtvlnovou desku s orientací $\alpha = 45^\circ$ se obdrží:

$$\mathbf{Q}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

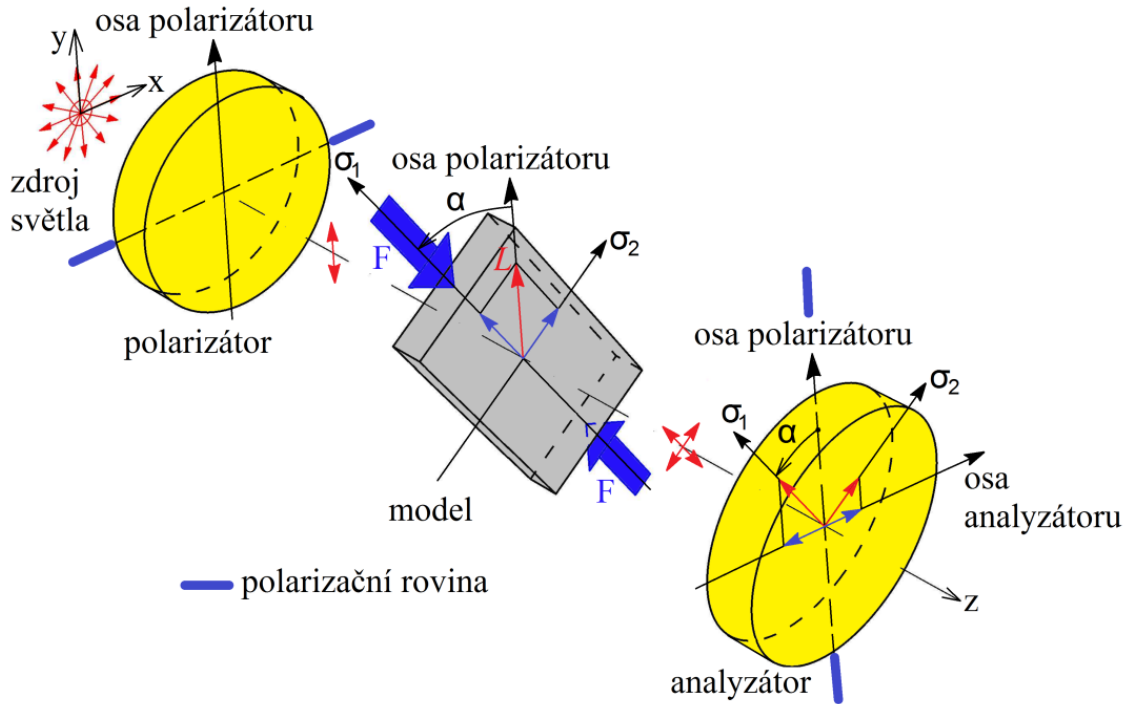
Matice jednotlivých optických členů budou v další kapitole využity pro určení výsledné světelné intenzity u polariskopu pro rovinnou a kruhovou polarizaci.

2.7 POLARISKOP PRO ROVINNOU POLARIZACI

Rovinný polariskop je optické zařízení, které vytváří přímkově polarizované světlo. Je složen ze třech optických součástí (viz obr. 2.9):

- ❖ ze zdroje světla,
- ❖ z polarizátoru,
- ❖ a analyzátoru.

Mezi polarizátor a analyzátor se umístí zkoumaný vzorek z opticky citlivého materiálu. Vzorek může být zatížen mechanicky, nebo může obsahovat zbytkovou napjatost. Optické osy polarizátoru a analyzátoru jsou vzájemně kolmé (viz obr. 2.9).



obr. 2.9 Sestava polariskopu vytvářející přímkově polarizované světlo.

Složky vektoru světla za analyzátozem určíme pomocí Jonesova počtu [9]:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) & -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\alpha) \\ -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\alpha) & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} E_m e^{j(\omega t)}. \quad (2.24)$$

Po úpravě:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\alpha) \\ \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) \end{Bmatrix} E_m e^{j(\omega t)}. \quad (2.25)$$

Poslední člen na pravé straně rovnice (2.25) označuje světelný vektor dopadající na polarizátor.

Protože je optická osa analyzátoru kolmá na optickou osu polarizátoru, projde pouze složka E_x . Intenzita světla je pak úměrná čtverci amplitudy, nebo násobku složky E_x se svým komplexním doplňkem E_x^* [9], [16]. Výsledná intenzita bude dána vztahem:

$$I_p = I_a \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin^2(2\alpha), \quad (2.26)$$

kde I_a je intenzita světla dopadajícího na polarizátor.

Za analyzátozem lze pozorovat dva druhy interferenčních pruhů:

- 1) *Izochromatické pruhy*, které spojují místa s konstantním rozdílem hlavních napětí.

Vzniknou v případě, kdy bude člen $\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$ v rovnici (2.26) roven nule, tedy v případě kdy zpoždění:

$$\delta = 2 \pi m, \quad \text{kde } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Proměnná m v rovnici (2.27) se nazývá relativním dvojlomem, nebo také řádem izochromatické křivky.

- 2) *Izoklinné pruhy*, které souvisí s orientací hlavních napětí v tělese. Z rovnice (2.26) vyplývá, že světelná intenzita bude nulová také když:

$$\sin^2(2 \alpha) = 0. \quad (2.28)$$

Odtud pro úhel natočení polarizačních filtrů:

$$\alpha = n \frac{\pi}{2}, \text{ kde } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

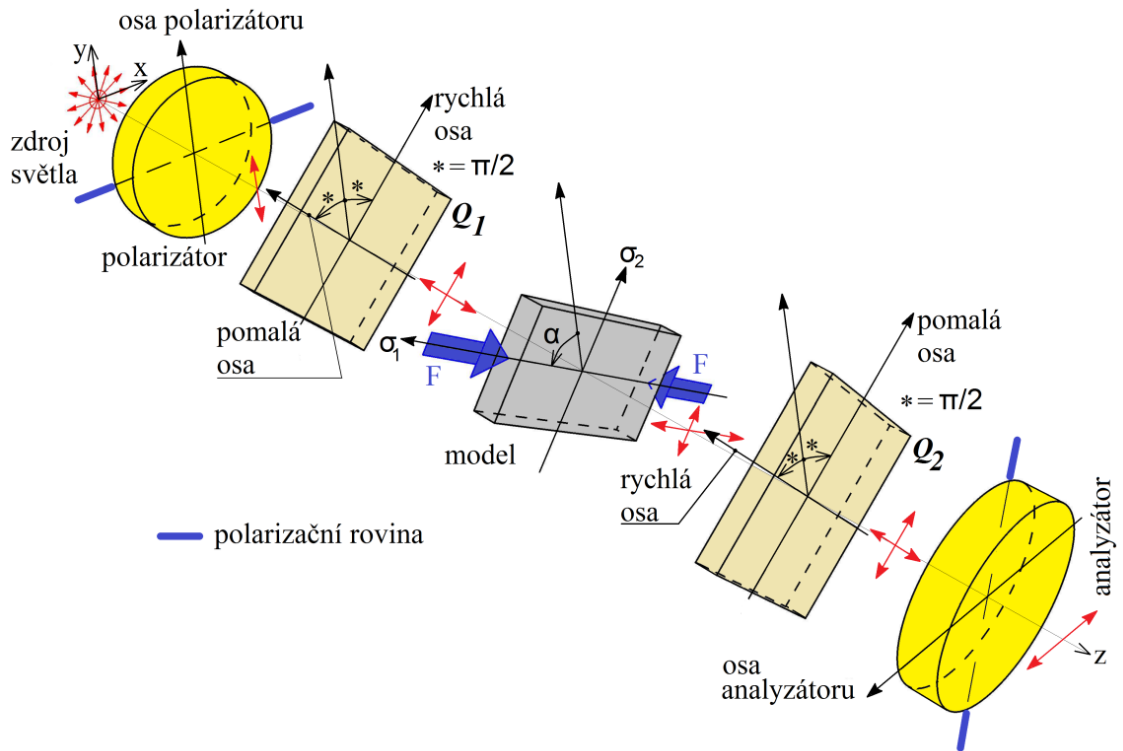
Podle [4] jsou izoklinné křivky definovány jako místa, v nichž jsou směry hlavních napětí totožné se směry zkřížených polarizačních filtrů.

V tomto uspořádání polariskopu se většinou využívá bílé světlo, ve kterém lze snadno rozlišit izoklinné křivky od křivek izochromatických. Izochromatické pruhy jsou barevné, kdežto izoklinné pruhy jsou černé. Lze pozorovat také singulární a izotropní body, případně čáry a plochy, které se v bílém světle jeví jako černá místa. Na rozdíl od izoklinných křivek se při natáčení zkřížených polarizačních filtrů nepohybují [4].

2.8 POLARISKOP PRO KRUHOVOU POLARIZACI

Polariskop pro kruhovou polarizaci obsahuje navíc dvě čtvrtvlnové desky. Optické osy těchto desek jsou vzájemně kolmé a s osami polarizátoru a analyzátoru svírají úhel 45° . Na obr. 2.10 je základní sestava polariskopu pro kruhovou polarizaci, u něhož jsou osy polarizátoru vzájemně kolmé. Zorné pole polariskopu je tmavé.

Čtvrtvlnové desky jsou vyrobeny z materiálu s trvalým dvojlomem. Každá čtvrtvlnová deska má rychlou osu a osu pomalou. Přímkově polarizované světlo dopadající na čtvrtvlnovou desku se rozloží do směrů těchto os. V rychlejší ose se složka světla šíří rychleji. Tyto desky zajišťují, že zpoždění pomalejší složky za rychlejší složkou je rovno $1/4$ vlnové délky použitého monochromatického světla, což má za následek vznik kruhové polarizace [17], [18].



obr. 2.10 Polariskop s tmavým polem pro kruhovou polarizaci.

Pomocí Jonesova počtu lze určit výslednou intenzitu světla za analyzátozem. Pro složky světla po průchodu polariskopem platí [9]:

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) & -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\alpha) \\ -j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin(2\alpha) & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} E_m e^{j(\omega t)}. \quad (2.30)$$

Složky světelného vektoru po úpravě rovnice (2.30):

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-j(2\alpha)} \\ \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{Bmatrix} E_m e^{j(\omega t)}. \quad (2.31)$$

Intenzita se získá vynásobením složky E_x s komplexním doplňkem E_x^* :

$$I_d = I_a \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right). \quad (2.32)$$

Optické sestavě podle obr. 2.10 se také říká polariskop s tmavým polem, proto je zde použit index d (z anglického „dark“). Z rovnice (2.32) je patrné, že intenzita není závislá na natočení polarizátorů, ale jen na zpoždění δ . V této sestavě nevznikají izoklinné křivky. Intenzita světla bude nulová při splnění rovnice (2.27).

Je-li optická osa analyzátoru rovnoběžná s optickou osou polarizátoru, vznikne kruhová polarizace komplementární. Někdy je taková sestava nazývána polariskopem se světelným polem (anglicky „light“). Intenzita I_ℓ je poté dána výrazem:

$$I_\ell = I_a \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right). \quad (2.33)$$

V monochromatickém světle vyvstanou černé izochromatické pruhy (polovičních řádů) v místech, kde pro zpoždění δ bude platit [9]:

$$\delta = \pi (2m + 1), \quad \text{kde } m = 0,5; 1,5; 2,5; \dots \quad (2.34)$$

Odpovídající relativní dvojlom m nabývá polovičních hodnot. Vzniklé pruhy se nazývají izochromaty polovičních řádů.

2.9 SEPARACE NAPĚTÍ

Z fotoelasticimetrického zkoumání se získají dva druhy interferenčních pruhů [4]:

- ❖ *Izochromatické křivky*, které v překladu lze označit, jako „křivky konstantní barvy“. Barevně se jeví pouze v bílém světle. Tyto křivky spojují body s konstantním rozdílem hlavních napětí ($\sigma_1 - \sigma_2$).
- ❖ *Izoklinné křivky*, které spojují body se stejným sklonem hlavních napětí vůči polarizačním filtrům. Každé izoklinné křivce se přiřazuje parametr, který označuje úhel natočení polaroidů, např. izoklina 0° , izoklina 60° atd.

V mnoha případech je nezbytné znát tenzor napětí. Metody, které se za tímto účelem používají, se nazývají separační metody. Separační metody se rozdělují podle toho, zda je nutné provádět další experimentální měření, nebo jestli existuje možnost určit složky napětí numerickými výpočty. V článku [19] jsou uvedeny jednotlivé metody podle data svého vzniku. Mezi nejčastěji používané metody patří [16]:

- ❖ metoda založená na Hookově zákoně,
- ❖ metoda šikmého dopadu světla,
- ❖ metoda rozdílu smykových napětí (metoda založená na řešení rovnic rovnováhy),
- ❖ Filonova metoda,
- ❖ metoda založená na řešení rovnice kompatibility (Laplaceovy rovnice).

Ke stanovení složek tenzoru napětí mimo povrch vzorků bude použita metoda rozdílu smykových napětí.

Metoda rozdílu smykových napětí

Metoda je založená na řešení rovnic rovnováhy vyjádřených v kartézských souřadnicích. Jedná se o jednu z nejvíce používaných metod. Pomocí ní je možné určit složky napětí podél přímkového řezu, který zpravidla začíná na hraně obrysu modelu, nebo v místě, kde jsou složky napětí již známy [16].

Velkou výhodou metody je její poměrně snadná algoritmizace. Provádění manuálních výpočtů bylo v historii značně složité a zdoluhavé. Dnes metoda patří mezi široce používanou pro vyhodnocení napětí na celém povrchu analyzovaného vzorku [20].

Statické rovnice rovnováhy v kartézských souřadnicích, pokud se neuvažuje vliv objemových sil, lze pro rovinnou napjatost vyjádřit takto [21]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (2.35)$$

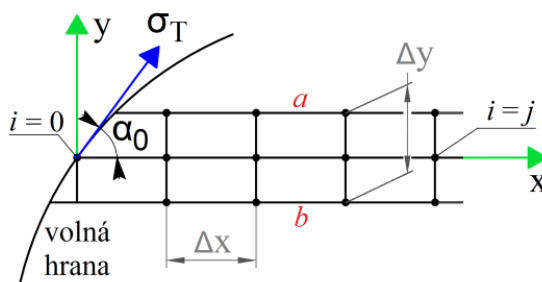
Integrací rovnic (2.35) ve směru osy x , resp. osy y se obdrží [9] [14]:

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_j &= (\sigma_x)_i - \int_i^j \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx, \\ (\sigma_y)_j &= (\sigma_y)_i - \int_i^j \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Pro numerické výpočty jsou rovnice upraveny pomocí konečných diferencí:

$$\begin{aligned}(\sigma_x)_j &= (\sigma_x)_i - \sum_i^j \frac{\Delta \tau_{yx}}{\Delta y} \Delta x; \quad i = 0, 1, 2 \dots j \\ (\sigma_y)_j &= (\sigma_y)_i - \sum_i^j \frac{\Delta \tau_{xy}}{\Delta x} \Delta y; \quad i = 0, 1, 2 \dots j\end{aligned}\quad (2.37)$$

Příklad integrační mřížky pro přímkový řez ve směru osy x je na obr. 2.11. Ve vzdálenosti $\pm \Delta y/2$ jsou dvě pomocné přímky a a b . Ve všech bodech mřížky je zapotřebí určit velikosti rozdílu hlavních napětí pomocí izochromatických pruhů a úhel, který svírá směr napětí σ_1 s osou x .



obr. 2.11 Mřížka používaná u metody rozdílu smykových napětí.

Pokud se řeší druhá z rovnic (2.37) pro $(\sigma_y)_j$, pak jde o úhel, který svírá směr napětí σ_2 s osou y .

Jestliže na volné hraně působí tečné napětí σ_T , pak se složka napětí v počátečním bodě integrace $(\sigma_x)_0$ vypočte takto [16]:

$$(\sigma_x)_0 = \sigma_T \cos^2(\alpha_0). \quad (2.38)$$

Smyková napětí v rovnici (2.37) se vypočítají z Mohrovy kružnice [4]:

$$\tau_{a,i} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)_{a,i} \sin(2 \alpha_{a,i}), \quad (2.39)$$

$$\tau_{b,i} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)_{b,i} \sin(2 \alpha_{b,i}), \quad (2.40)$$

$$\tau_{xy,i} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)_i \sin(2 \alpha_i). \quad (2.41)$$

Po dosazení do první rovnice (2.37) se získá [4]:

$$(\sigma_x)_j = (\sigma_x)_i - \sum_i^j \frac{\tau_{a,i} - \tau_{b,i}}{\Delta y} \Delta x = (\sigma_x)_i - \sum_i^j \Delta \tau_{i,str} \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad (2.42)$$

kde

$$\Delta \tau_{i,str} = \frac{1}{2} (\Delta \tau_i - \Delta \tau_{i-1}). \quad (2.43)$$

Jestliže je z první rovnice (2.37) známá složka napětí σ_x , pak druhou složku σ_y lze stanovit z jednoduchého vztahu:

$$(\sigma_y)_j = (\sigma_x)_j \pm (\sigma_1 - \sigma_2)_j \cos(2 \alpha_j). \quad (2.44)$$

Hlavní napětí pro libovolný bod plynou z Mohrovy kružnice:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}. \quad (2.45)$$

Na závěr lze dopočíst ekvivalentní napětí např. podle hypotézy HMM [22]:

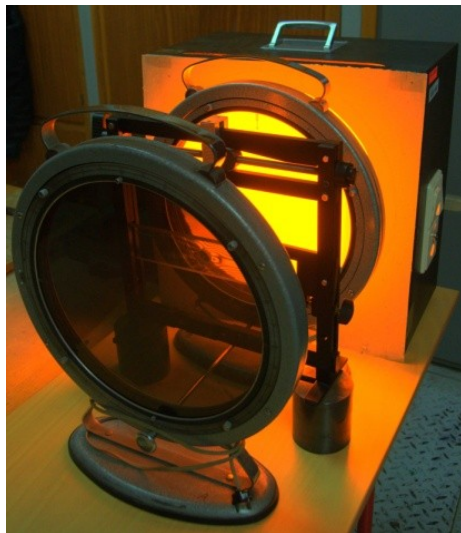
$$\sigma_{red}^{HMM} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2]}. \quad (2.46)$$

Obdobně se postupuje i při řešení druhé rovnice (2.35) pro $(\sigma_y)_j$.

Metoda byla zpřesněna prof. Tesařem, který vyjádřil složky napětí, jako funkce rozdílu hlavních napětí a rozdílu úhlových parametrů izoklinných křivek. Tento přístup byl uznáván za přesnější, i když novější zkoumání ukazují, že celková chyba je v obou přístupech srovnatelná [20], [23].

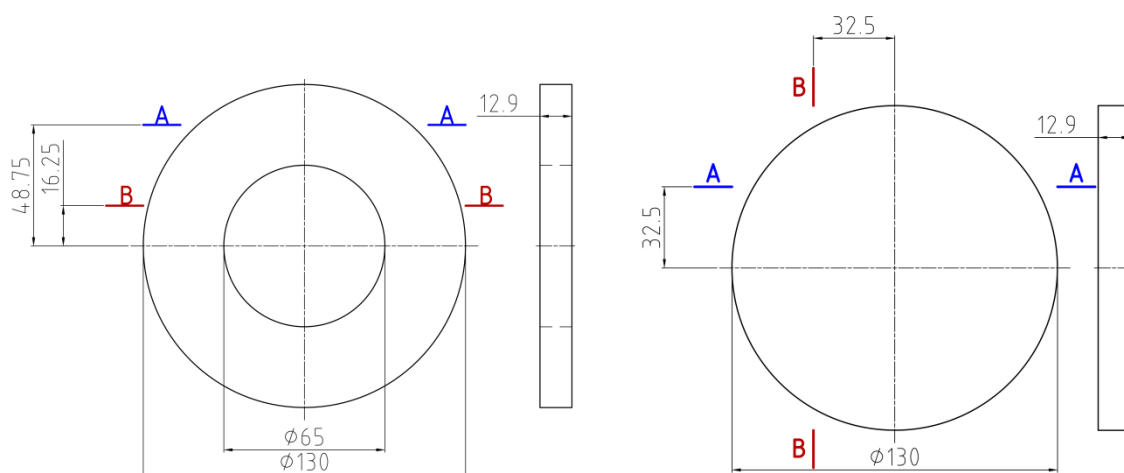
3 POČÍTAČOVÉ ZPRACOVÁNÍ FOTOELASTICIMETRICKÝCH SNÍMKŮ

Cílem této práce bylo vypracovat algoritmy pro počítačové zpracování obrazů izoklinných a izochromatických pruhů. Pro tvorbu algoritmů byl využit software MATLAB. Fotoelasticimetrická měření probíhala v laboratořích VŠB-TU Ostrava na polariskopu, který je vidět na obr. 3.1.

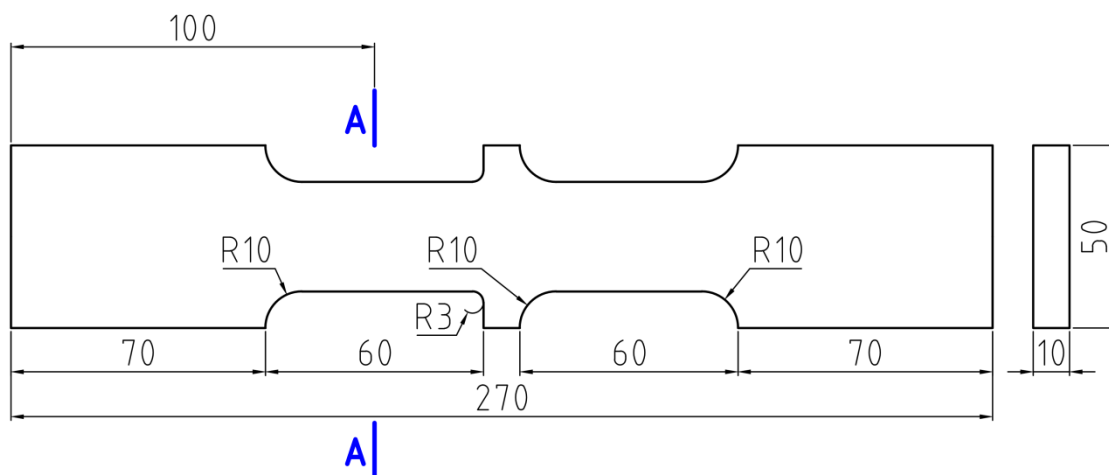


obr. 3.1 Polariskop pro přímkovou a kruhovou polarizaci.

Program je ověřen na třech testovacích vzorcích. Je provedena analýza centricky stlačovaného prstence, centricky stlačovaného kruhového disku a vetknutého nosníku, který je namáhán ohybem. Rozměry vzorků jsou uvedeny na obr. 3.2 a obr. 3.3. Postup a ukázka funkčnosti programu je uskutečněna pouze na příkladu prstence, u ostatních tvarů se postupuje obdobně.

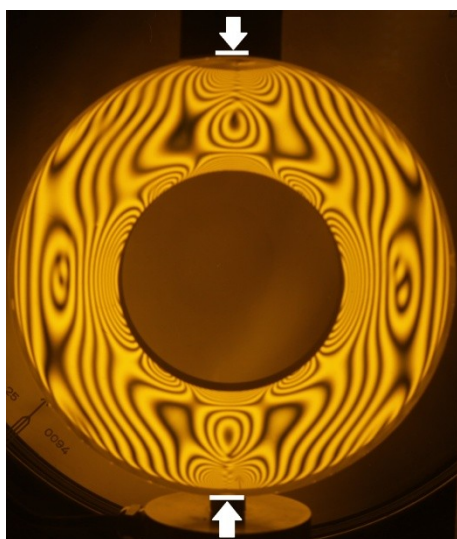


obr. 3.2 Rozměry prstence a kruhového disku. Jednotky v mm.

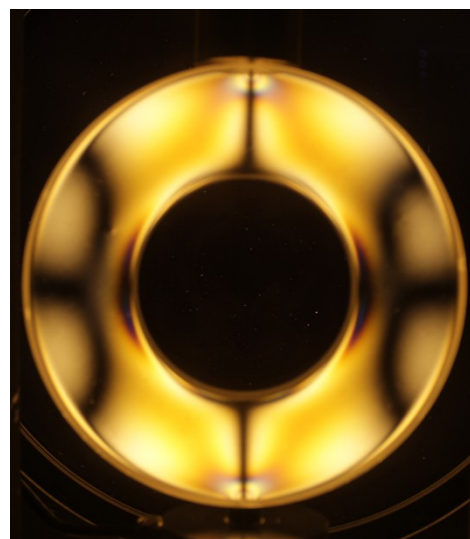


obr. 3.3 Rozměry tvarového nosníku. Jednotky v mm.

Fotografie izochromatických pruhů celých řádů je na obr. 3.4. Izoklinné křivky byly fotografovány při natočení filtrů rovinného polariskopu o úhel 0° , 15° , 30° , 60° a 90° . Příklad izoklinné 0° křivky je na obr. 3.5.



obr. 3.4 Izochromatické křivky.



obr. 3.5 Izoklinna 0° .

Izochromatické křivky podávají informaci o napjatosti uvnitř tělesa a spojují místa, v nichž je velikost rozdílu hlavních napětí ($\sigma_1 - \sigma_2$) konstantní. Izochromatické křivce odpovídá napětí podle rovnice (2.9).

Konstanta optické citlivosti byla pro materiál prstence stanovena v literatuře [1] a má hodnotu podle vztahu (3.1). Pro materiál nosníku má hodnotu podle vztahu (3.2) [24].

$$k^c = 17,4 \text{ N mm}^{-1} \quad (3.1)$$

$$k^c = 7,0 \text{ N mm}^{-1} \quad (3.2)$$

Izoklinné křivky určují místa, kde jsou směry hlavních napětí kolmé, nebo rovnoběžné se směry optických os polarizátorů. Slouží ke konstrukci izostatických křivek, které se dále dělí na izostaty první a druhé osnovy. Vytvořením tečny k izostatické křivce, se získá přímo směr napětí σ_1 , nebo σ_2 . Izochromatické a izoklinné křivky jsou základním vstupem programu.

3.1 STRUKTURA VYHODNOCOVACÍHO PROGRAMU

Počítačový program, který byl v rámci diplomové práce vytvořen, dokáže vyhodnotit napětí na celé ploše vzorku. Pro stanovení složek tenzoru napětí uvnitř vzorku využívá metodu rozdílu smykových napětí. Postup ručního vyhodnocení, který byl popsán v bakalářské práci [1] je zcela prováděn počítačově a z velké části automatizován. Základní kroky prováděné ve vytvořeném programu jsou tyto:

- ❖ definování obrysu vzorku,
- ❖ určení izochromatických křivek,
- ❖ určení izoklinných křivek,
- ❖ vytváření výpočetní mřížky,
- ❖ stanovení částečných řádů v bodech mřížky,
- ❖ stanovení směru prvního hlavního napětí σ_1 v bodech mřížky,
- ❖ řešení metodou rozdílu smykových napětí,
- ❖ vyhodnocení.

Jednotlivé části obsahují mnoho dalších funkcí a modulů, které umožňují editaci a korekci výstupů. Uživatel tak má možnost aktivně ovlivňovat průběh programu.

Hlavním vstupem jsou snímky izochromatických a izoklinných pruhů. Výstupem programu jsou jednotlivé složky tenzoru napjatosti, hlavní napětí a redukované napětí podle hypotézy HMM určené na celé ploše vzorku.

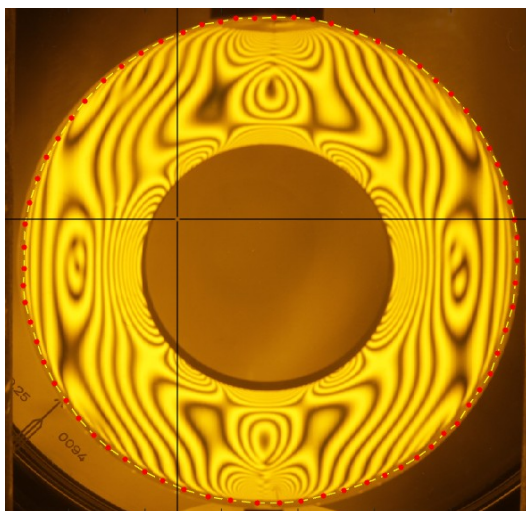
Definování obrysu vzorku

Všechny fotografie (izochromatických a izoklinných křivek) musí být provedeny pro statickou polohu fotoaparátu. Jakákoliv změna polohy fotoaparátu v průběhu měření výrazně komplikuje následné zpracování měření.

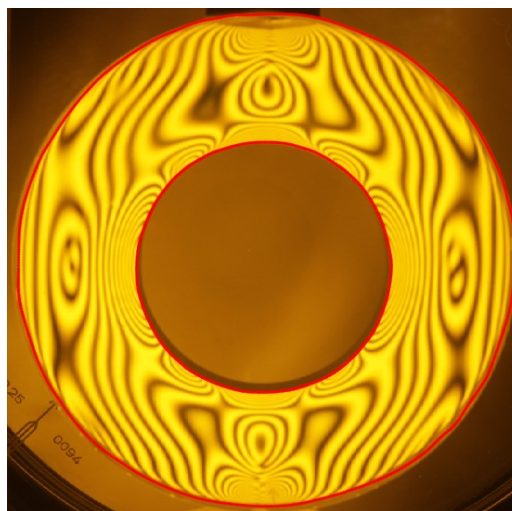
Pomocí kurzoru myši jsou zadány body obrysu. Jedná se o vrcholy řídicího polygonu Bézierovy křivky. Hustota bodů se volí podle tvarové složitosti obrysu. Obrys, který je tvořen přímkami lze vykreslit pouze polygonem.

Postup definování obrysu je následující:

- ❖ Načte se fotografie s patrným obrysem řešeného modelu. Je možné použít obraz izochromatických pruhů, nebo obraz jedné izoklinné křivky.
- ❖ Pomocí myši se zadají vrcholy řídicího polygonu. Každý obrys musí být tvořen jedinou uzavřenou smyčkou (viz obr. 3.6).



obr. 3.6 Řídicí polygon vnějšího obrysu



obr. 3.7 Kompletní obrys modelu.

Výstup algoritmu:

Výstupem jsou souřadnice bodů obrysů, které jsou pro každou křivku uloženy v datovém formátu MATLABu.

Výhody a nevýhody algoritmu:

Výhodou algoritmu je jeho použitelnost i pro poměrně složité tvary. Z modelu lze vyjmout oblast, která není předmětem zájmu. Většinou je to výhodné v oblastech singulárních a izotropních bodů. Z důvodu symetrie je teoreticky možné řešit pouze 1/4 modelu.

Nevýhodou je pracnost spojená s určením řídicích bodů. Na přesnosti určení těchto bodů závisí také přesnost vykreslení obrysu. U velkých modelů je nevýhodou nutnost vykreslovat obrys jako uzavřenou křivku.

Detekování obrysu v budoucnosti může probíhat automaticky za pomoci metod pro zpracovávání digitálních obrazů.

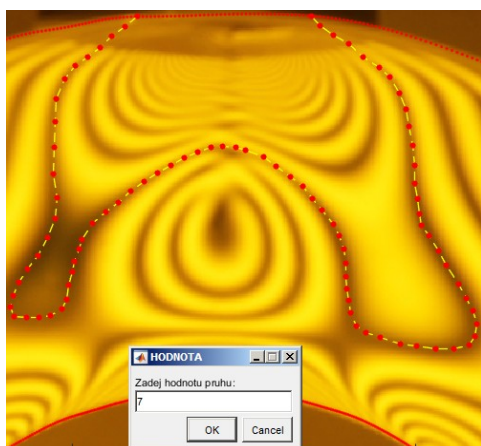
Určení izochromatických křivek

Následující dva algoritmy pracují na podobném základu jako algoritmus předchozí. Izochromatická křivka je vykreslena pomocí Bézierovy křivky. Vstupem jsou obrazy

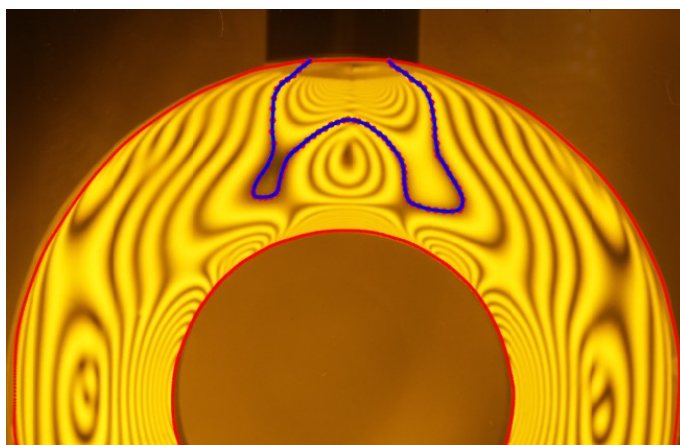
izochromatických pruhů celých a polovičních řádů. Po vykreslení křivky dojde prostřednictvím dialogového okna k zadání jejího řádu, což je znázorněno na obr. 3.8.

Postup při vykreslování izochromatických křivek:

- ❖ Je načten obraz izochromatických křivek a spustí se soubor *B_SpusteniIzochromaty.m*.
- ❖ Postupuje se podle zobrazovaných instrukcí. Zadávání řídicích bodů je ukončeno pravým tlačítkem myši. Následně dojde k zadání příslušného řádu vykreslené křivky.
- ❖ Postup se opakuje, dokud nejsou vykresleny všechny křivky.



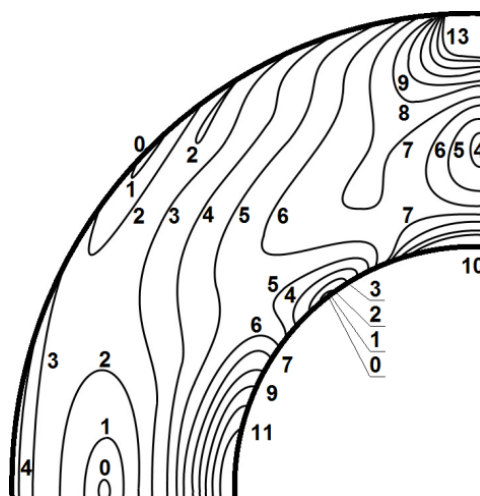
obr. 3.8 Určení křivky a zadání jejího řádu



obr. 3.9 Vykreslená izochromatická křivka 7. řádu.

Výstup algoritmu:

Výstupem je soubor, který obsahuje souřadnice bodů všech vykreslených křivek a přiřazené hodnoty řádů. Jedná se o datový typ MATLABu. Řády jednotlivých křivek u modelu prstence jsou uvedeny na obr. 3.10.



obr. 3.10 Izochromatické křivky celých řádů (1/4 modelu).

Výhody a nevýhody algoritmu:

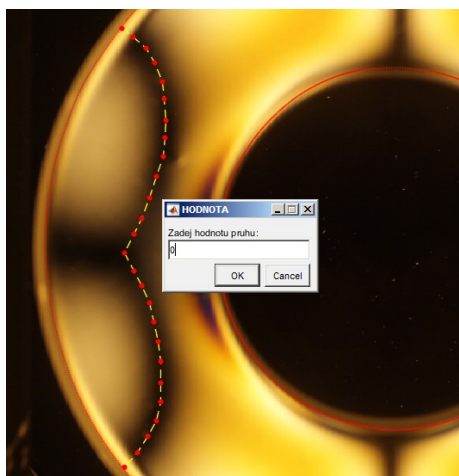
Výhodou je jednoduché vykreslení křivek ve srovnání s manuálním přístupem. Lze použít přiblížení, a tak vykreslit vysoké hodnoty řádů v místech s velkým gradientem napětí. Je možné vykreslovat křivky otevřené i uzavřené. Řády izochromatických pruhů lze jednoduše upravit.

V případě velkého počtu křivek může být i tento poloautomatický přístup, co se týče určování řídicích bodů, časově náročnější.

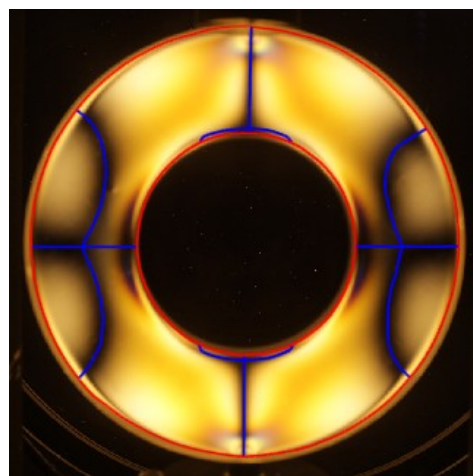
Určení izoklinných křivek

Vstupem jsou fotografie izoklinných křivek parametrů 0° až 90° . Úhlový parametr je celé číslo a rozdíl mezi jednou izoklinnou a izoklinnou následující je vždy konstantní. Fotografie jsou postupně nahrávány a vykreslovány. V dialogovém okně se zadává parametr izoklinné křivky v úhlových stupních.

Na obr. 3.11 je znázorněn způsob zadávání jednotlivých segmentů izokliny 0° a na obr. 3.12 uveden její celkový obraz.



obr. 3.11 Zadání jednoho segmentu izokliny 0° .



obr. 3.12 Kompletní obraz izoklinné 0° křivky.

Výstup algoritmu:

Výstupem je soubor, který obsahuje souřadnice bodů všech vykreslených křivek a informace o jejich úhlových parametrech.

Výhody a nevýhody algoritmu:

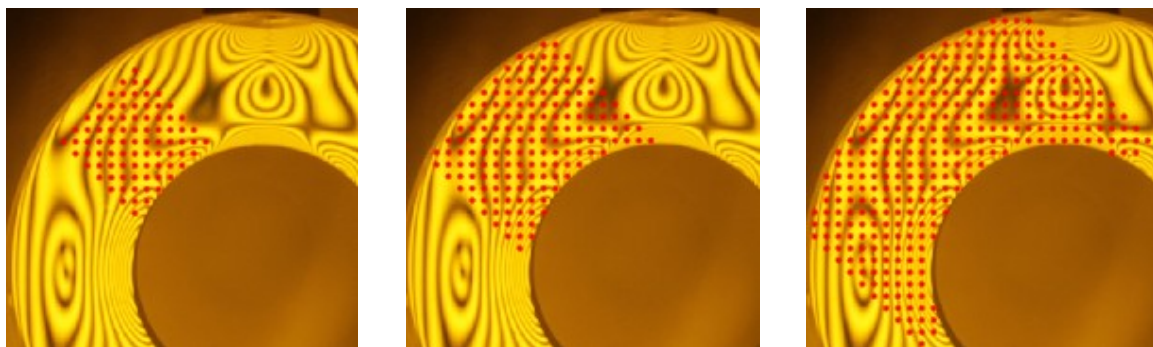
Výhodou je značné zjednodušení vzhledem k ručnímu přístupu. Křivky mohou být otevřené i uzavřené.

Pro velký počet křivek je i vykreslování pomocí tohoto algoritmu zdlouhavé. V blízkosti singulárních a izotropních bodů se průběhy křivek obtížně určují, což je „vlastnost“ fotoelasticimetrické metody.

Vytváření výpočetní mřížky

Pro aplikování metody rozdílu smykových napětí, je potřeba mít uvnitř modelu mřížku, v jejichž bodech budou odečítány parametry izochromatických a izoklinných křivek. Pro náš účel se nejlépe hodí mřížka s konstantním krokem ve směru osy x a y . Vytvoření takové mřížky není triviální z jednoho podstatného důvodu. V dalších algoritmech je vyžadováno, aby každý nově vzniklý bod měl bezprostředně ve svém okolí alespoň jeden bod, ve kterém je známá hodnota předešlého výpočtu. Jinak řečeno, hodnota výpočtu v daném bodě závisí na hodnotě v bodech sousedních. Za tímto účelem vznikl algoritmus, který umožňuje vytvořit síť bodů i na složitých rovinných modelech při zachování této podmínky. Ukázka tvorby výpočetní mřížky pro model prstence je na obr. 3.13.

Vstupem algoritmu jsou souřadnice bodů obrysu, velikost kroku (vzdálenost mezi sousedními body) a souřadnice počátečního bodu, který leží v oblasti našeho zájmu. Počáteční bod je určen pomocí myši.



obr. 3.13 Časový průběh tvorby mřížky.

Výstup algoritmu:

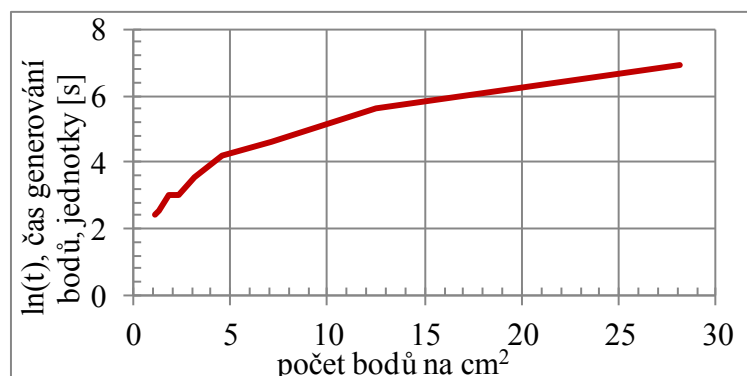
Výstupem jsou souřadnice vytvořených bodů uložené v pořadí jejich vzniku.

Výhody a nevýhody algoritmu:

Pořadí vzniků bodů je takové, že každý nově vzniklý bod má ve svém bezprostředním okolí bod, který vznikl dříve.

Nevýhodou algoritmu je jeho časová náročnost, která souvisí s velikostí modelu a s velikostí kroku mřížky. Časová náročnost algoritmu pro model prstence je vykreslena

v grafu 3.1. Časovou náročnost lze obejít tak, že se vytvoří mřížka s menší hustotou bodů. Provedou se potřebné výpočty, které jsou popsány níže, a pak se hustota příslušným algoritmem zvýší. Výsledky se poté přepočítají.



pozn.: Graf byl
vytvořen pro
model s plošným
obsahem
99,5 cm².

graf 3.1 Časová náročnost generování bodů.

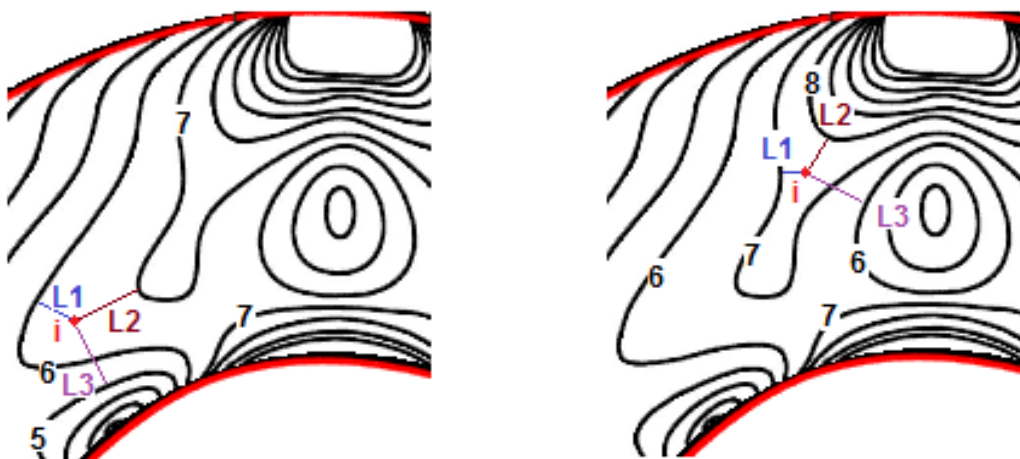
Stanovení řádů izochromatických křivek v bodech mřížky

Ve vzniklých bodech je nutné určit řády izochromatických křivek, které odpovídají rozdílu hlavních napětí ($\sigma_1 - \sigma_2$). Za předpokladu dostatečně hustého pole izochromatických křivek, se částečný řád v bodě i určí ze vztahu:

$$m_i = \frac{m_1 \cdot L_1 + m_2 \cdot L_2}{L_1 + L_2}, \quad (3.3)$$

kde m_1 je řád nejbližší izochromatické křivky k bodu i , a m_2 je řád druhé nejbližší izochromatické křivky k bodu i . Vzdálenosti těchto křivek od bodu i jsou L_1 a L_2 (viz obr. 3.14). Izochromatická křivka, jejíž spojnice s bodem i protíná křivku s nejkratší možnou vzdáleností, se do výpočtu nezahrnuje (viz na obr. 3.14 vzdálenost L_3).

Vstupem algoritmu jsou data izochromatických křivek a jejich řádů. Dalším vstupem je matice obsahující souřadnice bodů mřížky.



obr. 3.14 Výpočet částečného řádu.

Výstup algoritmu:

Výstupem jsou hodnoty řádů vypočtené v každém bodě výpočetní mřížky. Souřadnice bodů a jim příslušné řády jsou uloženy pro další zpracování.

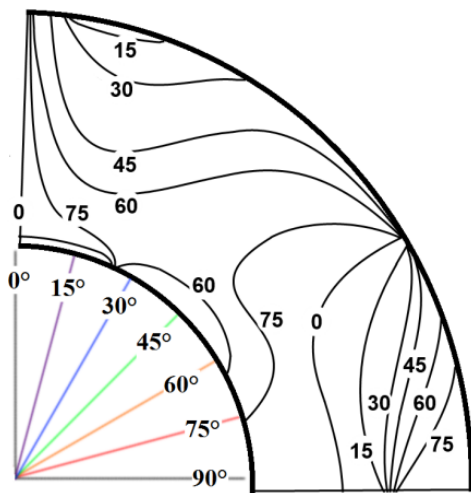
Výhody a nevýhody algoritmu:

Ve srovnání s manuálním určováním mezilehlých řádů je tento způsob výrazně přesnější a rychlejší.

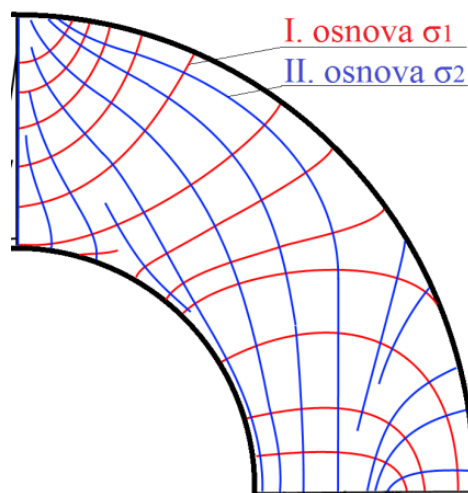
Odečítání částečných řádů pomocí vzorce (3.3) je přibližné a lze jej použít jen v případě dostatečně hustého pole izochromatických křivek.

Stanovení směru hlavního napětí σ_1 v bodech mřížky

Podél izoklinné křivky jsou směry hlavních napětí skloněny o konstantní úhel vůči referenční poloze polarizačních filtrů. Velikost úhlu je určena parametrem izoklinné křivky. Izoklinné křivky slouží jako předloha k vytvoření tzv. izostatických křivek I. a II. osnovy, které jsou na sebe kolmé a tečna k nim sestrojená určuje směr prvního hlavního napětí σ_1 , respektive druhého hlavního napětí σ_2 (viz obr. 3.15a obr. 3.16).



obr. 3.15 Izoklinné křivky se směrovým vějířem.



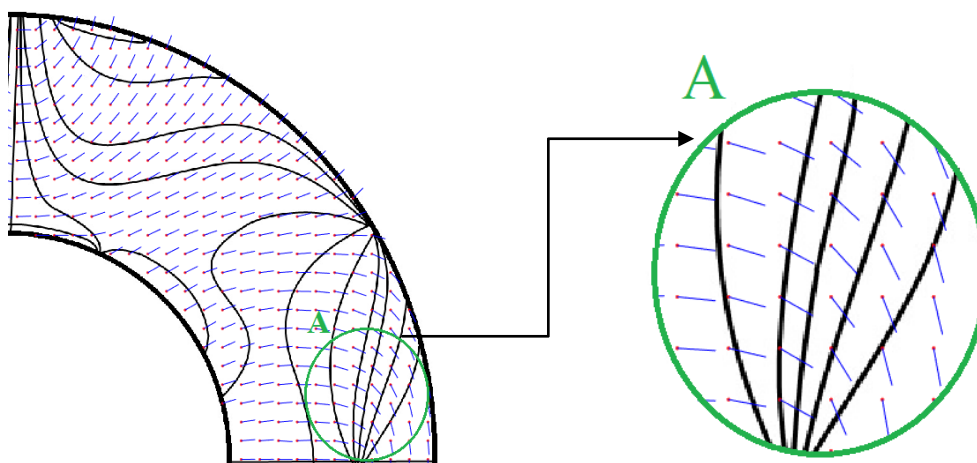
obr. 3.16 Izostatické křivky I. a II. osnovy.

Při manuálním určování izostatických křivek se postupuje tak, že např. na izoklinné 45° křivce se sestrojí rovnoběžka s odpovídající přímkou ve směrovém vějíři. Přímka je prodloužená do poloviny vzdálenosti mezi izoklinnou 45° a 60°. V koncovém bodě se vytvoří další rovnoběžka se sklonem 60° opět do poloviny následující izoklinné křivky. Tímto způsobem se postupuje přes celý model. Výsledkem je síť polygonálních tahů, které jsou tečným obalem izostatických křivek. Konstrukci izostatických křivek výrazně komplikuje přítomnost singulárních a izotropních bodů, v jejichž blízkosti se směry

hlavních napětí výrazně mění. Více o konstrukci izostatických křivek a problematice singulárních bodů lze nalézt v literatuře [15], [17] a [24].

Pro další výpočty postačí určení pouze jediné osovy udávající orientaci napětí σ_1 . Za tímto účelem vytvořený algoritmus dokáže v každém bodě mřížky určit směrový úhel napětí σ_1 (viz obr. 3.17). Algoritmus využívá izoklinné křivky. Úhlové parametry v bodech mřížky stanovuje procedurou využívanou ke stanovení částečných řádů (viz předchozí kapitola). Algoritmus v každém bodě mřížky porovnává směr hlavního napětí se směry v sousedních bodech pomocí skalárního součinu a zaručuje tak vykreslení pouze směru jednoho hlavního napětí. Směr napětí σ_2 je vždy kolmý na směr σ_1 .

Vstupem algoritmu je datový typ MATLABu, který obsahuje souřadnice bodů izoklinných křivek a informace o jejich úhlových parametrech. Dalším vstupem jsou souřadnice bodů mřížky.



obr. 3.17 Orientace napětí σ_1 je znázorněna krátkými úsečkami.

Výstup algoritmu:

Výstupem jsou souřadnice bodů spolu s úhly, které udávají orientaci napětí σ_1 vůči vodorovné ose x .

Výhody a nevýhody algoritmu:

Zjednodušení vykreslování izostatických křivek obou osnov. Orientaci napětí lze kontrolovat s výsledky z konečnoprvkového řešení. Není zapotřebí překreslování směrů za pomoci směrového vějíře.

V oblastech singulárních a izotropních bodů může dojít k „přeskočení“ z jedné osnovy na druhou. Chybně určené orientace napětí σ_1 lze manuálně opravit pomocí příslušného algoritmu.

Úprava hustoty výpočetní sítě

V kapitole „Vytváření výpočetní mřížky“ bylo uvedeno, že s rostoucí hustotou souřadných bodů velmi rychle narůstá časová náročnost algoritmu. Pokud je hustota bodů nedostatečná, je možné ji zvýšit algoritmem, který je časově méně náročný. Algoritmus využívá funkci MATLABu pro vytvoření soustavy souřadných bodů. Pomocí další funkce rozhoduje, zda jsou body uvnitř řešené oblasti. Jestliže dojde k úpravě výpočetní mřížky, pak je nutné v těchto bodech znovu určit hodnoty částečných řádů a určit směr hlavního napětí σ_1 .

Řešení metodou rozdílu smykových napětí

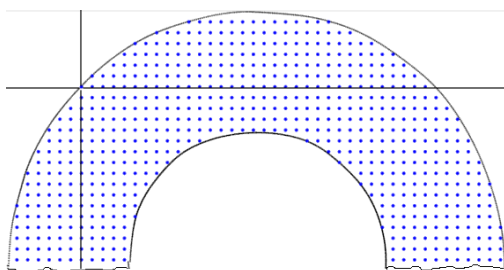
Nyní jsou k dispozici všechny potřebné údaje k aplikování metody rozdílu smykových napětí. Je známá velikost rozdílu hlavních napětí ($\sigma_1 - \sigma_2$) včetně směru hlavního napětí σ_1 ve všech bodech mřížky.

Metoda rozdílu smykových napětí je plně algoritmizována a je tvořena několika samostatnými funkcemi. Jádro těchto funkcí je obdobné a liší se jen v několika drobnostech. Jde o realizaci postupu výpočtu zleva doprava, zprava doleva, ze spodu nahoru a shora dolů. Počátek výpočtu je v bodě, který je nejbližší k obrysu modelu.

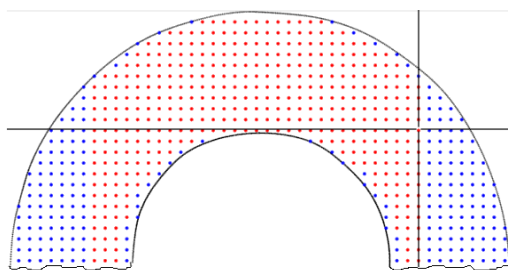
Vstupem jsou souřadnice výpočetních bodů s určenými řády izochromatických křivek a orientací hlavního napětí σ_1 v těchto bodech. Dále je potřeba znát povahu tangenciálního napětí (tah nebo tlak) na malém povrchu vzorku, odkud bude výpočet vycházet.

Algoritmus funguje následujícím způsobem:

- ❖ Po spuštění se pomocí dialogového okna určí, zda se výsledky z předchozího výpočtu zachovají, nebo zda má dojít k jejich vymazání. Při prvním spuštění nehraje naše volba roli.
- ❖ V modrých bodech mřížky nebylo provedeno řešení metodou rozdílu smykových napětí (viz obr. 3.18).



obr. 3.18 Separace napětí zatím nebyla provedena.



obr. 3.19 V červených bodech byla provedena separace napětí metodou rozdílu smykových napětí.

- ❖ Pomocí myši se zadá výchozí bod v blízkosti obrysu, kde je známá povaha tangenciálního napětí. Po určení bodu, je vyžadováno zadání směru výpočtu. Platí následující označení:

<input type="checkbox"/> 2 - výpočet shora dolů,	<input type="checkbox"/> 6 - výpočet zleva doprava,
<input type="checkbox"/> 8 - výpočet zdola nahoru,	<input type="checkbox"/> 4 - výpočet zprava doleva.
- ❖ Uživatel zadá, zda je na obrysu tahové nebo tlakové napětí. Vzápětí dojde k vlastnímu automatickému výpočtu.
- ❖ Algoritmus se spustí znovu, přičemž se ponechají výsledky z prvního výpočtu. Body, ve kterých jsou složky napětí již separovány, se zobrazí červenou barvou (viz obr. 3.19).
- ❖ Jako počáteční bod dalšího výpočtu lze vybrat bod u obrysu (pak je nutné zadat povahu obvodového napětí), nebo jakýkoliv „červený“ bod. Výpočty se opakují tak dlouho, dokud nebude vyřešená celá oblast modelu.

Výstup algoritmu:

Výstupem algoritmu jsou separované složky napětí. Jsou vypočtena jednotlivá hlavní napětí a redukované napětí podle pevnostní hypotézy HMM.

Výhody a nevýhody algoritmu:

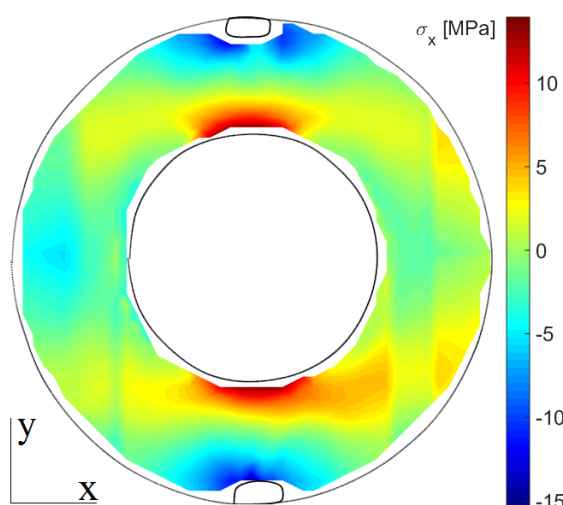
Separaci napětí lze snadno provést na celém povrchu modelu. Výsledky jsou uloženy v souboru pro případné budoucí zpracování. V části definování obrysu modelu, je možno z výpočtu vyjmout místa, kde je aplikováno zatížení a vyřešit je zvlášť. Výsledky pak nebudou ovlivněny chybou, která nastane v případě, kdy je výchozí bod v oblasti s vysokou koncentrací napětí.

Pro získání výsledků i v bezprostřední blízkosti obrysu, je potřeba provést přepočít s menším krokem výpočetní sítě. S rostoucím počtem bodů sítě může narůstat i akumulovaná chyba výpočtu. Výsledky závisí na volbě výchozího bodu.

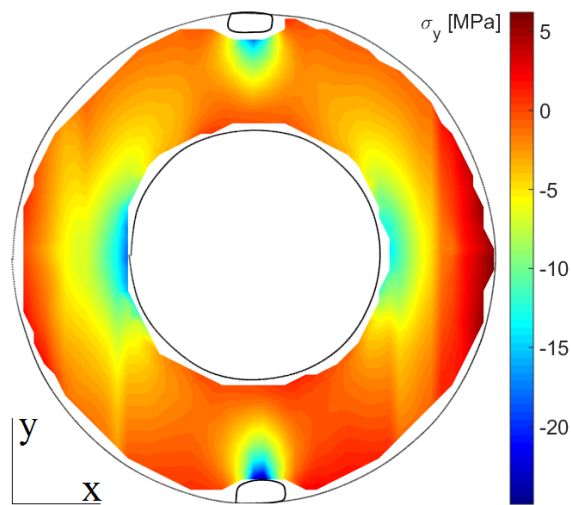
Vyhodnocení výsledků

Po vyřešení celé oblasti nebo jen její části jsou výsledky přístupné pomocí modulu pro zobrazení výsledků. Lze zobrazit následující složky napětí: σ_x , σ_y , τ_{xy} , σ_1 , σ_2 a ekvivalentní napětí σ_{red}^{HMH} podle hypotézy HMM, případně podle Guesta σ_{red}^{GUEST} .

Na obr. 3.20 a obr. 3.21 jsou uvedeny výsledky pro napětí σ_x a σ_y . Ostatní složky tenzoru napjatosti jsou uvedeny v příloze A (viz obr. 9.1 až obr. 9.4).



obr. 3.20 Napětí ve směru osy x (σ_x).



obr. 3.21 Napětí ve směru osy y (σ_y).

V předchozích podkapitolách byl na příkladu modelu prstence stručně vysvětlen princip činnosti vytvořeného vyhodnocovacího programu. Obdobným způsobem se postupuje i u modelu kruhového disku a tvarového nosníku.

3.2 EXPERIMENTÁLNÍ ŘEŠENÍ DISKU A TVAROVÉHO NOSNÍKU

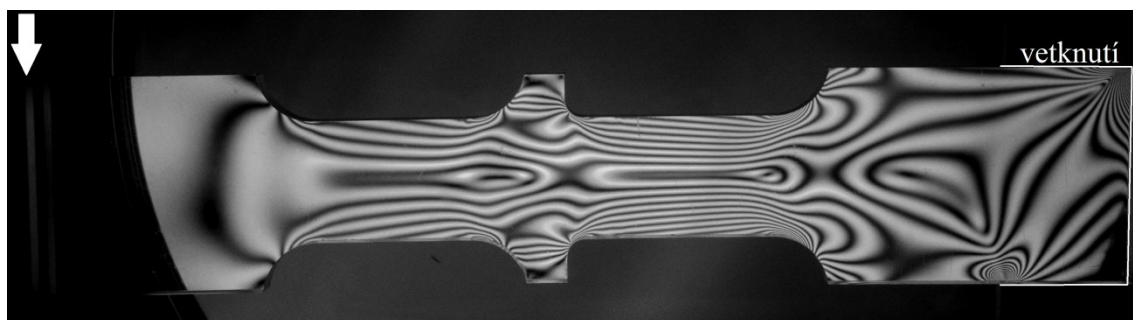
Disk byl namáhán tlakovou silou podle obr. 3.22 a obr. 3.23, na kterých jsou vidět izochromatické křivky celých a polovičních řádů. Isochromatické křivky celých řádů pro nosník namáhaný ohybem jsou uvedeny na obr. 3.24.



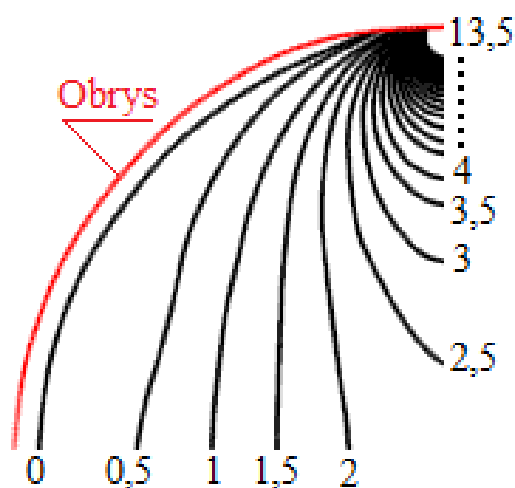
obr. 3.22 Isochromatické křivky celých řádů (tmavé pozadí).



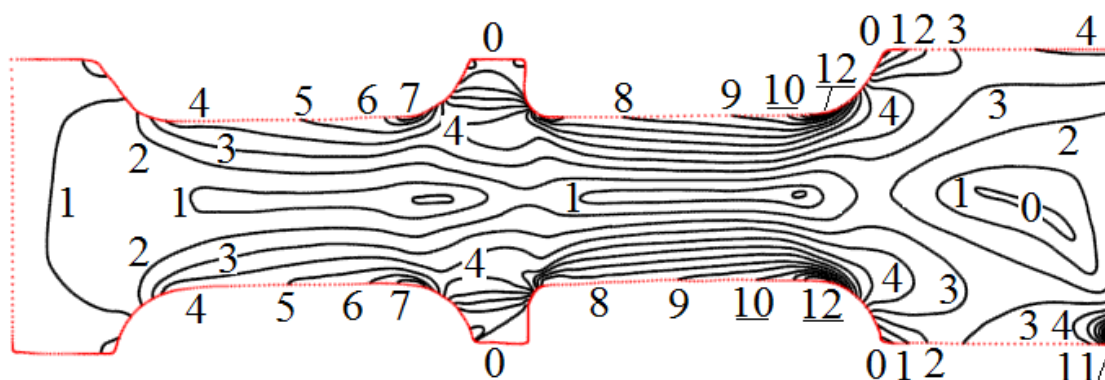
obr. 3.23 Isochromatické křivky polovičních řádů (světlé pozadí).



obr. 3.24 Izochromatické křivky tvarového nosníku namáhaného ohybem.



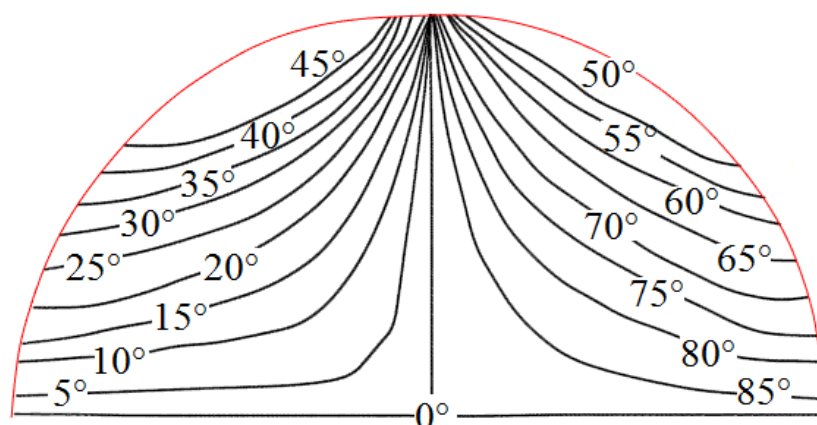
obr. 3.25 Řády izochromatických křivek 1/4 modelu disku.



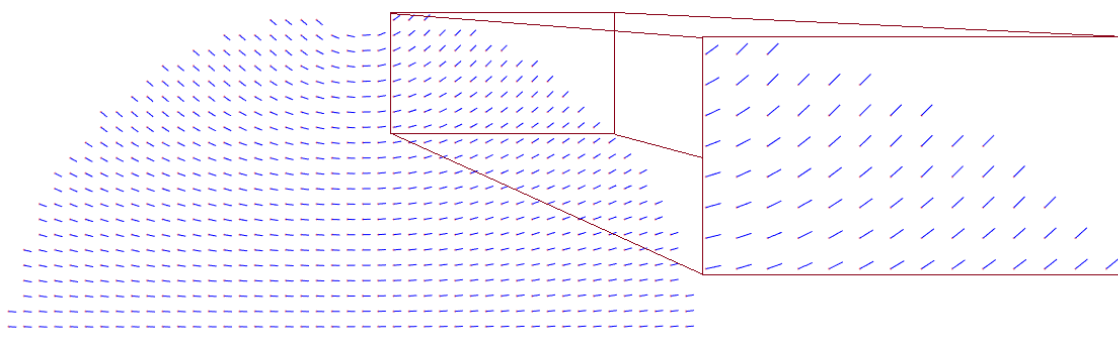
obr. 3.26 Řády izochromatických křivek nosníku namáhaného ohybem.

Izochromatické křivky obou modelů byly pomocí programu překresleny. Výsledek je patrný na obr. 3.25 a obr. 3.26, kde jsou uvedeny také jejich řády.

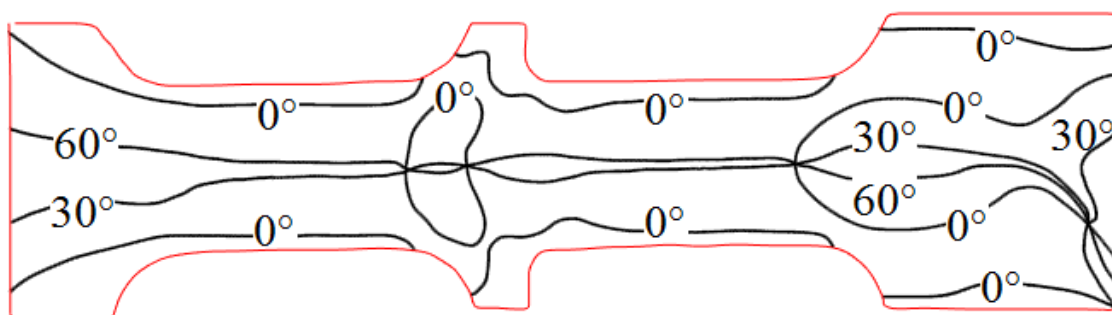
Zpracování izoklinných křivek probíhá obdobně. Kompletní průběhy izoklinných křivek jsou zobrazeny na obr. 3.27 a obr. 3.29.



obr. 3.27 Izoklinné křivky poloviny disku.



obr. 3.28 Směr hlavního napětí σ_1 u poloviny disku.



obr. 3.29 Izoklinné křivky u tvarového nosníku.

Vypočtené směrové pole prvního hlavního napětí σ_1 pro model kruhového disku je uvedeno na obr. 3.28, pro model nosníku na obr. 3.30.

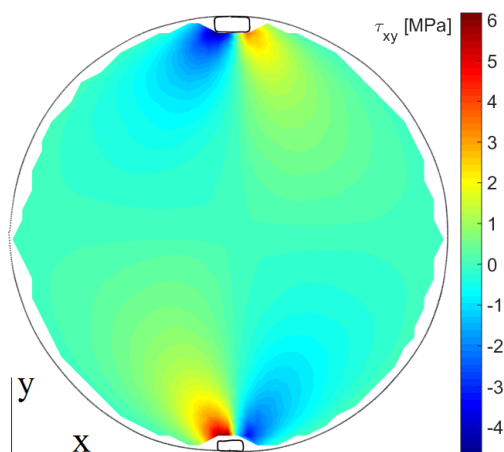


obr. 3.30 Směr hlavního napětí σ_1 u tvarového nosníku.

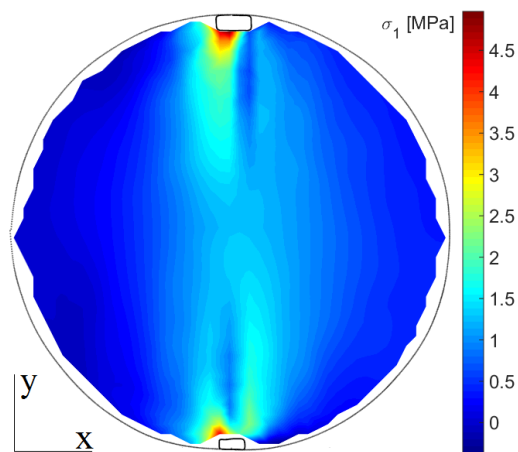
Vyhodnocení výsledků

Na obr. 3.31 a obr. 3.32 je zobrazeno smykové napětí τ_{xy} a první napětí hlavní σ_1 pro model kruhového disku.

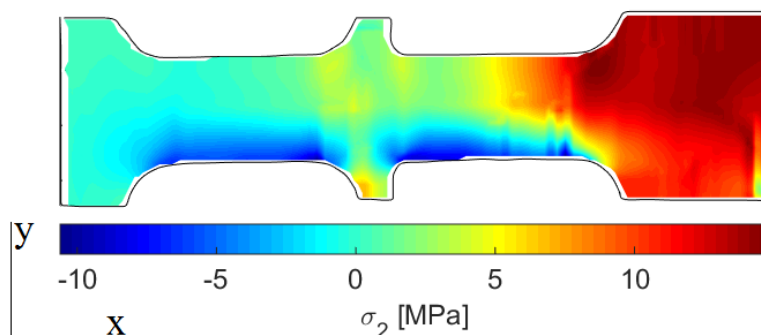
Na obr. 3.33 a obr. 3.34 je uvedeno druhé hlavní napětí σ_2 a redukované napětí σ_{red}^{HMH} podle hypotézy HMH pro model nosníku.



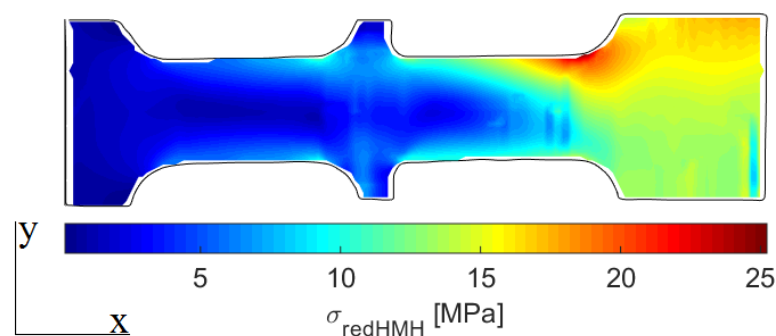
obr. 3.31 Smykové napětí τ_{xy} (disk).



obr. 3.32 První hlavní napětí σ_1 (disk).



obr. 3.33 Hlavní napětí σ_2 u tvarového nosníku.



obr. 3.34 Redukované napětí σ_{red}^{HMH} u tvarového nosníku.

Grafické zobrazení ostatních složek napětí pro oba vyšetřované tvary jsou uvedeny v příloze **B** (viz obr. 9.5 až obr. 9.8) a **C** (viz obr. 9.9 až obr. 9.12).

4 VÝPOČETNÍ ŘEŠENÍ PRSTENCE A KRUHOVÉHO DISKU METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

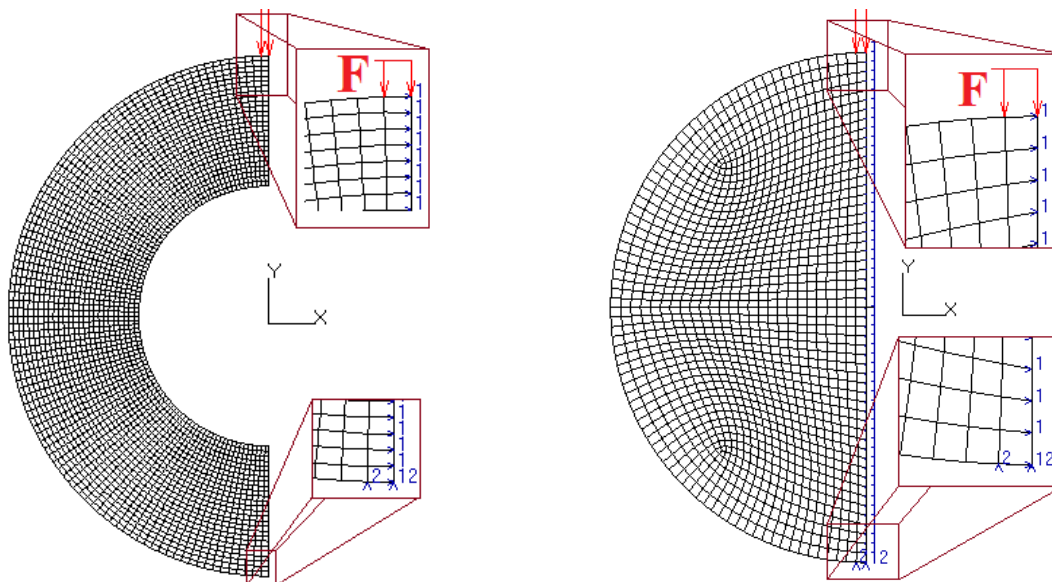
MKP řešení je provedeno v softwaru Patran. Po nastavení analýzy v Patranu lze úlohu řešit pomocí různých modulů („solver“) v závislosti na typu analýzy. V této práci bude využit modul MSC Nastran. Jedná se o modul pro řešení multidisciplinárních strukturálních problémů. Umožňuje řešit úlohy statické, dynamické, teplotní a to v oblastech lineárních i nelineárních [25].

Rozměry prstence a kruhového disku jsou patrné z obr. 3.2. Běžně udávané materiálové parametry fotoelasticimetrických materiálů jsou modul pružnosti a Poissonovo číslo. Pro materiál prstence a disku jsou uvedeny v tab. 1.

Prstenec i disk je modelován jako prostorová úloha. Chování materiálu je předpokládáno lineárně elastické. U obou součástí je z hlediska geometrie, zatížení a uložení splněna podmínka symetrie, což lze při řešení využít.

Okrajové podmínky

Uložení a zatížení je aplikováno přímo do uzlů konečnoprvkové sítě (viz obr. 4.1). Informace o konečnoprvkových modelech jsou shrnuty v tab. 2.



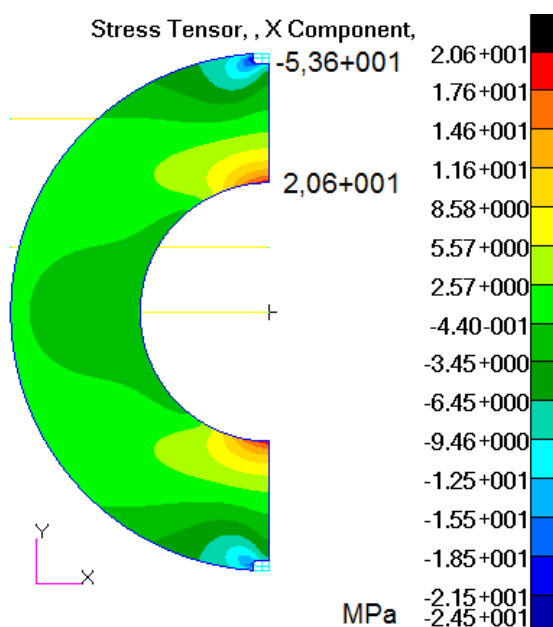
obr. 4.1 Okrajové podmínky prstence a kruhového disku.

<i>tab. 1</i> <i>Mechanické vlastnosti [26].</i>		
Materiál	Modul pružnosti	Poissonovo číslo
CT 200	$E = 3\,124 \text{ MPa}$	$\mu = 0,35$

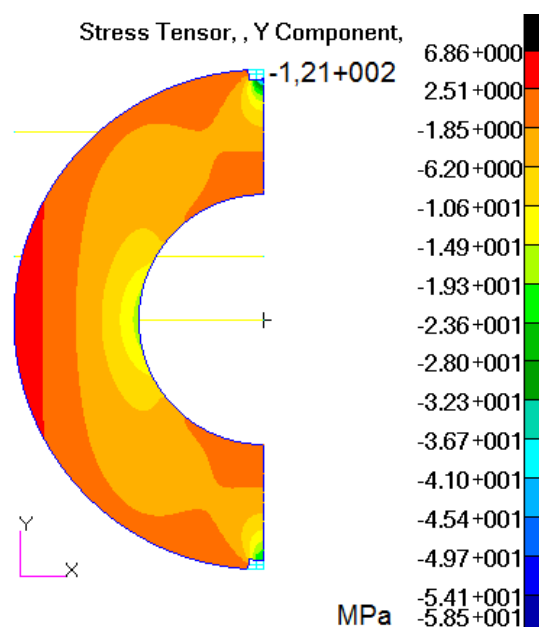
V rovině symetrie je uzlovým bodům zamezen posuv ve směru osy x . Jak prstenec, tak kruhový disk je stlačován silou, jejíž nositelka prochází středem modelu. Síla je aplikována do dvou řad uzlových bodů a její velikost byla určena přímo při měření pomocí tenzometrického snímače síly. Uzlům na opačné straně působící síly je odebrán stupeň volnosti ve směru osy y . Uzlům, které leží v polovině tloušťky modelu je odebrán stupeň volnosti ve směru osy z .

<i>tab. 2</i>	<i>Informace o diskretizovaných modelech.</i>		
	<u>Prstenec</u>	<u>Disk</u>	<u>Nosník</u>
Typ a počet elementů	CHEXA 26000	CHEXA 20619	CHEXA 14360
Počet uzlů	29997	23760	17415
Počet zatěžujících sil (velikost)	22 ($22 \times 59,43 \text{ N}$)	20 ($20 \times 49,84 \text{ N}$)	9 ($9 \times 5,6 \text{ N}$)
Tloušťka modelu	12,9 mm		10 mm
Materiál	CT 200		Polykarbonát

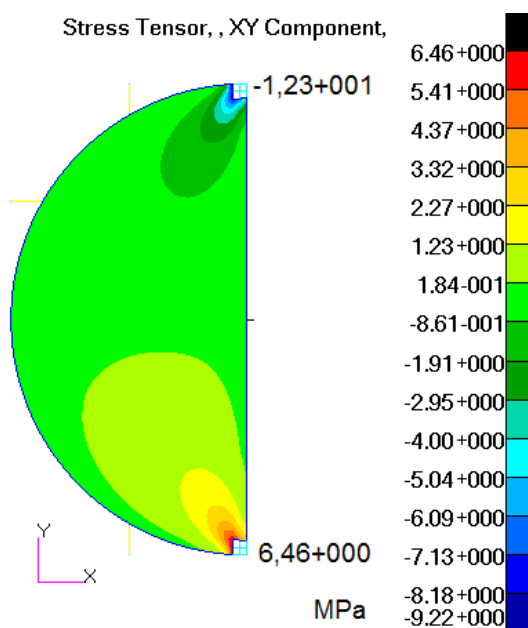
Výsledky z MKP analýzy jsou uvedeny na obrázcích níže a budou využity pro kontrolu experimentálního řešení (viz obr. 4.2 až obr. 4.5).



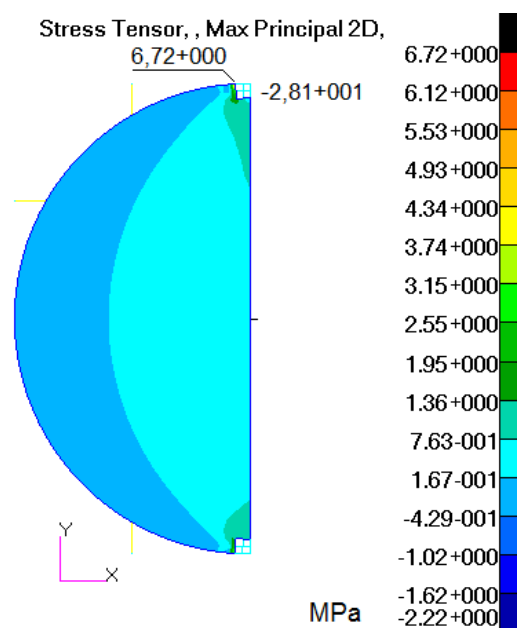
obr. 4.2 Napětí ve směru osy x (σ_x).



obr. 4.3 Napětí ve směru osy y (σ_y).



obr. 4.4 Smykové napětí τ_{xy} .



obr. 4.5 První hlavní napětí σ_1 .

4.1 MKP ANALÝZA TVAROVÉHO NOSNÍKU

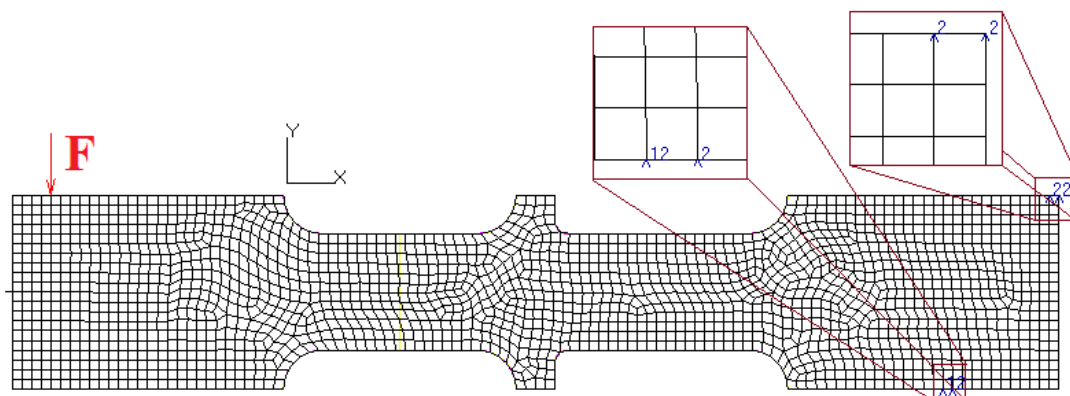
Rozměry a tvar nosníku je možno vidět na obr. 3.3. Materiál nosníku je polykarbonát, jehož mechanické vlastnosti jsou uvedeny v tab. 3.

Nosník je namáhaný ohybem a při řešení MKP modelován jako 3D úloha. Materiálový model je opět předpokládán izotropní lineárně elastický.

tab. 3	Mechanické vlastnosti materiálu [16].	
Materiál	Modul pružnosti	Poissonovo číslo
Polykarbonát	$E = 2480 \text{ MPa}$	$\mu = 0,38$

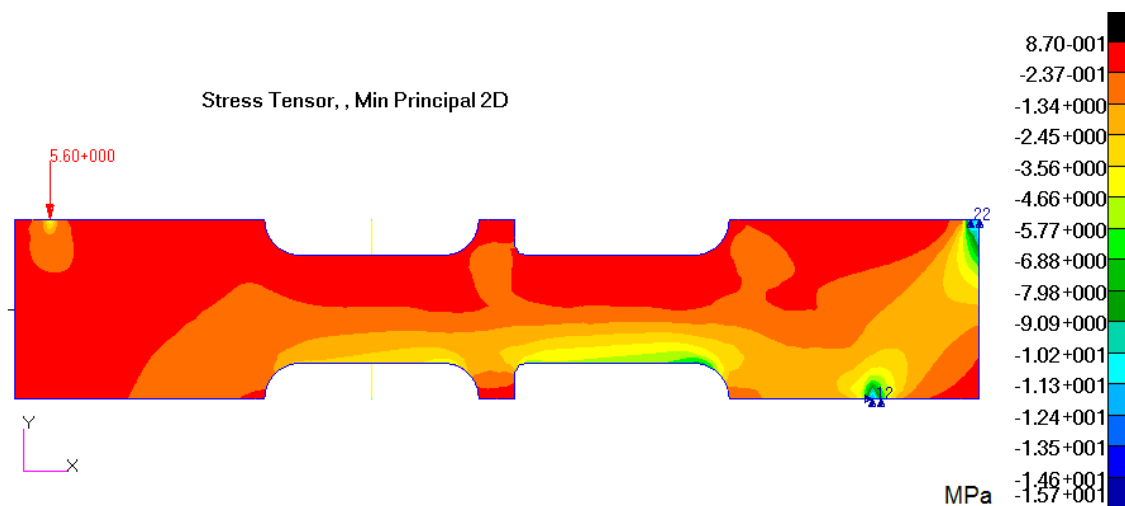
Okrajové podmínky

Na jednom konci nosníku působí osamělá síla ve vzdálenosti 10 mm od jeho okraje. Na druhém konci je nosník vsunut do drážky tvaru „U“ o hloubce 30 mm.

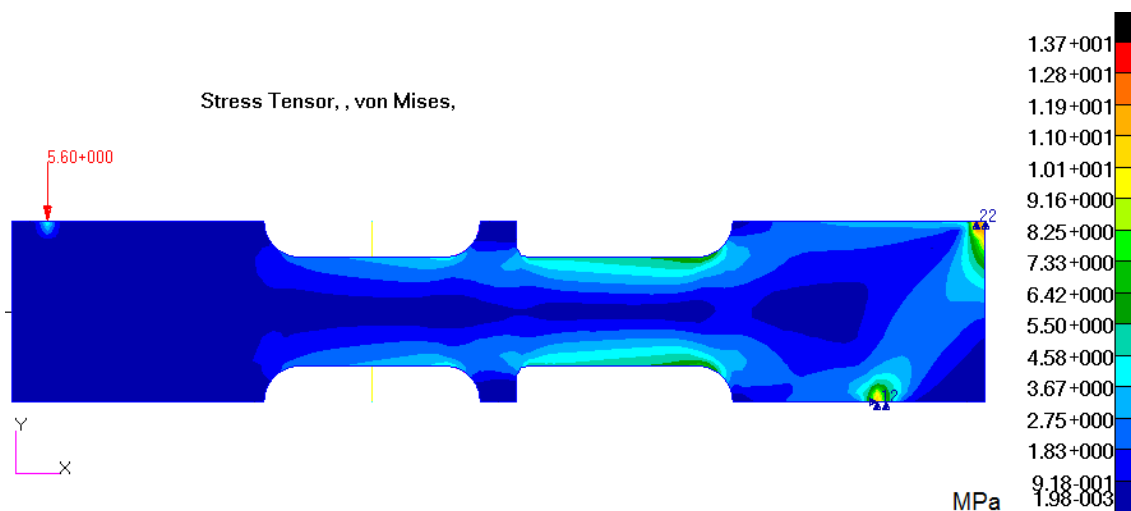


obr. 4.6 Okrajové podmínky nosníku.

Síla je aplikována do uzlových bodů. Vetknutí je nahrazeno zamezením posuvu ve směru osy y uzlům podle obr. 4.6. Stupeň volnosti ve směru osy x je odebrán uzlům, kolem kterých dochází k rotaci během zatížení. Uzlům, které leží v polovině tloušťky modelu je odebrán stupeň volnosti ve směru osy z .



obr. 4.7 Druhé hlavní napětí σ_2 u nosníku.

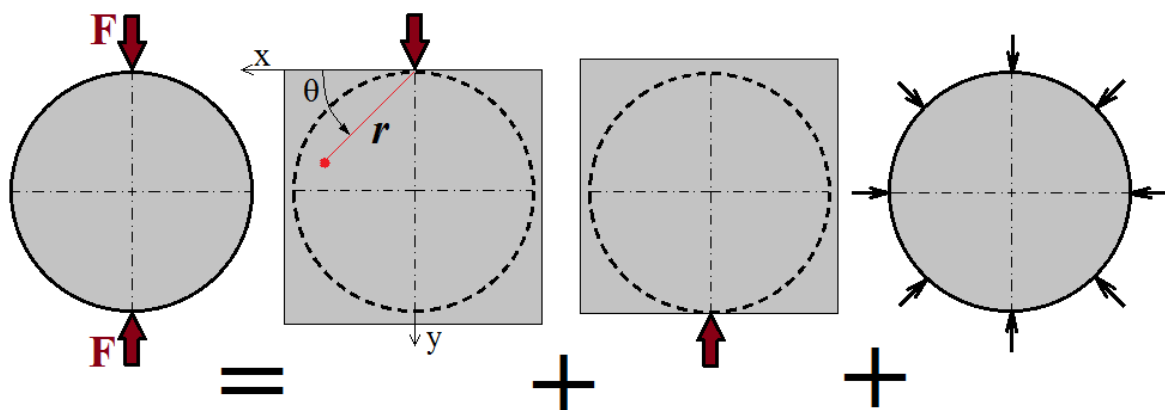


obr. 4.8 Redukované napětí σ_{red}^{HMH} u nosníku.

Na obr. 4.7 a obr. 4.8 jsou uvedeny hodnoty druhého hlavního napětí σ_2 a redukovaného napětí σ_{red}^{HMH} u tvarového nosníku.

5 ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ DISKU ZATÍŽENÉHO CENTRICKOU SILOU

Pomocí matematické teorie pružnosti, lze takto namáhaný disk řešit superpozicí třech samostatných úloh podle obr. 5.1. Následující postup výpočtu je možno nalézt např. v knize [27].



obr. 5.1 Řešení disku pomocí superpozice.

U poloroviny, na kterou působí osamělá síla, je Airyho funkce volena ve tvaru:

$$\begin{aligned} \phi = & (a_{12} r \log r + a_{15} r \theta) \cos \theta + \\ & + (b_{12} r \log r + b_{15} r \theta) \sin \theta, \end{aligned} \quad (5.1)$$

kde r a θ jsou polární souřadnice bodu (viz obr. 5.1).

Odtud lze dopočítat složky napětí v polárních souřadnicích působící na jednotku tloušťky:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{1}{r} [(a_{12} + 2 b_{15}) \cos \theta + (b_{12} - 2 a_{15}) \sin \theta], \\ \sigma_\theta = & \frac{1}{r} [a_{12} \cos \theta + b_{12} \sin \theta], \\ \tau_{r\theta} = & \frac{1}{r} [a_{12} \sin \theta - b_{12} \cos \theta], \end{aligned} \quad (5.2)$$

kde a_{12} , a_{15} , b_{12} , b_{15} jsou hledané konstanty.

Na povrchu poloroviny pro $\theta = 0^\circ$ platí, že $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$. Konstanty a_{12} a b_{12} pak budou nulové.

Z podmínky silové rovnováhy ve směru osy x a y se získají zbylé konstanty:

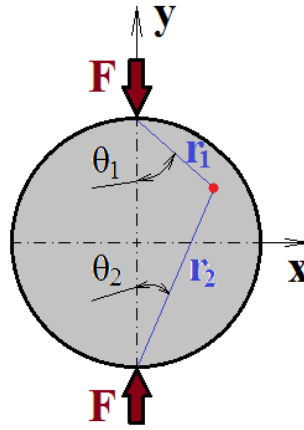
$$\begin{aligned} X = & - \int_0^\pi \sigma_r \cos \theta r d\theta = \dots = -b_{15} \pi \Rightarrow b_{15} = \frac{-X}{\pi}, \\ F = & - \int_0^\pi \sigma_r \sin \theta r d\theta = \dots = -b_{15} \pi \Rightarrow a_{15} = \frac{F}{\pi}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dosazením vypočtených konstant do rovnice (5.2) za předpokladu, že síla ve směru osy x je nulová ($X = 0$) se dostane:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{-2F}{\pi r} \sin \theta, \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Složky napětí v kartézské souřadné soustavě budou dány následujícími vztahy:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta = -\frac{2F x^2 y}{\pi (x^2 + y^2)^2}, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta = -\frac{2F y^3}{\pi (x^2 + y^2)^2}, \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \theta \cos \theta = -\frac{2F x y^2}{\pi (x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}\quad (5.5)$$



obr. 5.2 Souřadnice bodu disku.

Pokud jsou uváženy souřadnice bodu podle obr. 5.2, pak složky napětí pro dvě samostatné Flamantovy úlohy budou:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(1)} &= -\frac{2F}{\pi r_1} \cos \theta_1 \sin^2 \theta_1, & \sigma_x^{(2)} &= -\frac{2F}{\pi r_2} \cos \theta_2 \sin^2 \theta_2, \\ \sigma_y^{(1)} &= -\frac{2F}{\pi r_1} \cos^3 \theta_1, & \sigma_y^{(2)} &= -\frac{2F}{\pi r_2} \cos^3 \theta_2, \\ \tau_{xy}^{(1)} &= -\frac{2F}{\pi r_1} \cos^2 \theta_1 \sin \theta_1, & \tau_{xy}^{(2)} &= -\frac{2F}{\pi r_2} \cos^2 \theta_2 \sin \theta_2.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Radiální napětí na obvodu disku je k tomuto povrchu kolmé a nabývá hodnoty:

$$\begin{aligned}\sigma_{nD} &= -\sqrt{\left[\sigma_r^{(1)} \cos \theta_1\right]^2 + \left[\sigma_r^{(2)} \cos \theta_1\right]^2} = \\ &= -\sqrt{\left[-\frac{2F}{\pi D} \cos \theta_1\right]^2 + \left[-\frac{2F}{\pi D} \sin \theta_1\right]^2} = -\frac{2F}{\pi D},\end{aligned}\quad (5.7)$$

kde D je průměr disku.

Napětí hydrostatické je poslední složkou podílející se na superpozičním řešení. Je opačné vzhledem k napětí v rovnici (5.7):

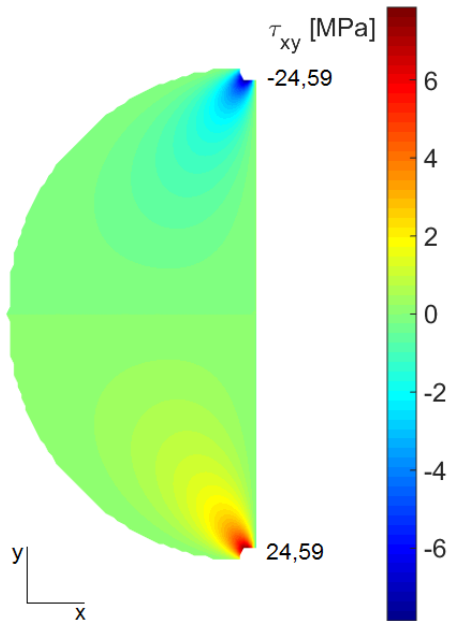
$$\sigma_x^{(3)} = \sigma_y^{(3)} = \frac{2 F}{\pi D} ; \tau_{xy}^{(3)} = 0 . \quad (5.8)$$

Složením rovnic (5.6) a (5.8) a vyjádřením goniometrických funkcí se získají hledané vztahy pro složky napětí v kartézské souřadné soustavě [27]:

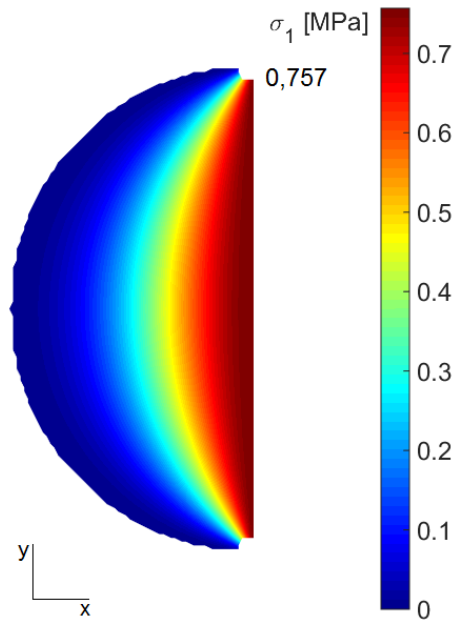
$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2 F}{\pi t} \left[\frac{(R-y)x^2}{r_1^4} + \frac{(R+y)x^2}{r_2^4} - \frac{1}{D} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{2 F}{\pi t} \left[\frac{(R-y)^3}{r_1^4} + \frac{(R+y)^3}{r_2^4} - \frac{1}{D} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{2 F}{\pi t} \left[\frac{(R-y)^2 x}{r_1^4} - \frac{(R+y)^2 x}{r_2^4} \right], \\ r_1 &= \sqrt{x^2 + (R-y)^2} ; r_2 = \sqrt{x^2 + (R+y)^2}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde R je poloměr disku a t je jeho tloušťka.

Analyticky vypočtené smykové napětí τ_{xy} a první hlavní napětí σ_1 jsou uvedeny na obr. 5.3 a obr. 5.4.



obr. 5.3 Smykové napětí τ_{xy} (analyticky).



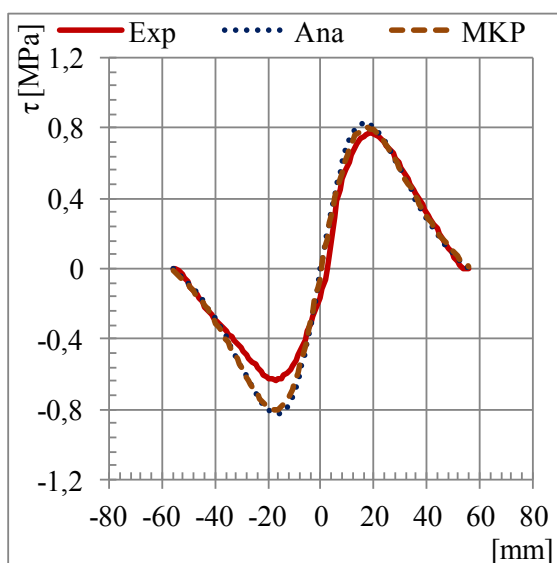
obr. 5.4 První hlavní napětí σ_1 (analyticky).

6 POROVNÁNÍ EXPERIMENTÁLNÍHO ŘEŠENÍ S VÝPOČTEM

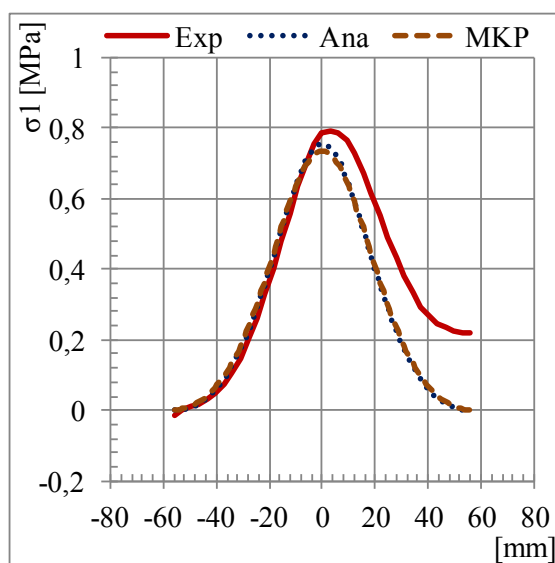
Numerické řešení metodou MKP a analytické řešení bylo provedeno s cílem porovnat výsledky obdržené programem, který využívá metodu rozdílů smykových napětí.

Model kruhového disku

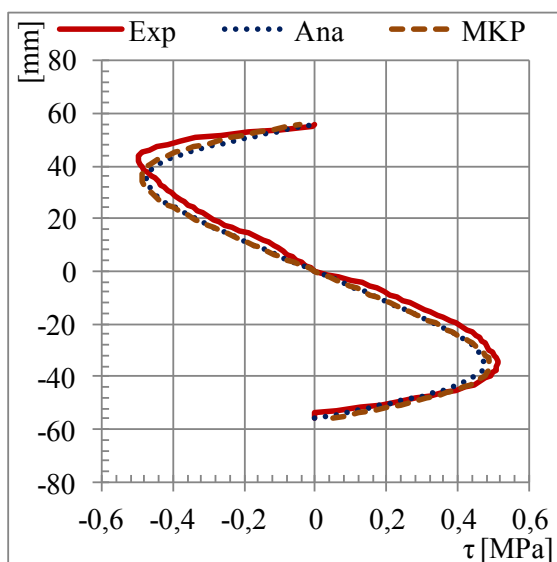
Průběh smykového napětí a prvního hlavního napětí v řezu A-A u modelu kruhového disku (viz obr. 3.2) ukazuje graf 6.1 a graf 6.2. Tytéž složky napětí v řezu B-B zobrazuje graf 6.3 a graf 6.4.



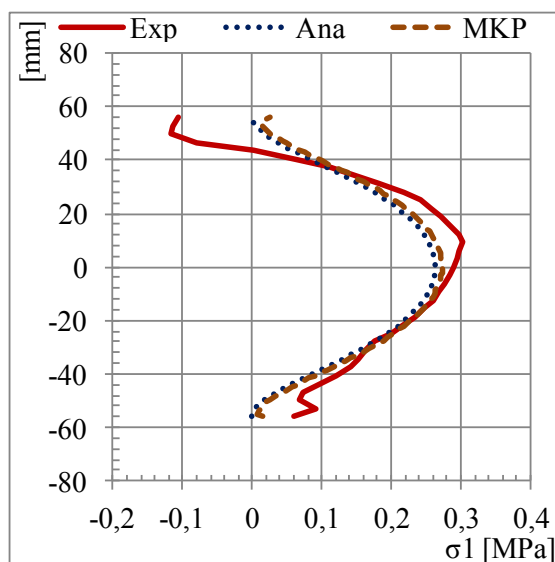
graf 6.1 Smykové napětí τ_{xy} v řezu A-A.



graf 6.2 První hlavní napětí σ_1 v řezu A-A.



graf 6.3 Smykové napětí τ_{xy} v řezu B-B (disk).

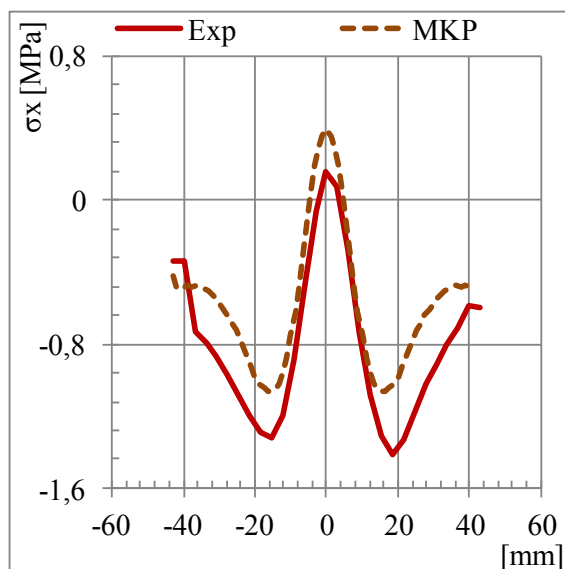


graf 6.4 První hlavní napětí σ_1 v řezu B-B (disk).

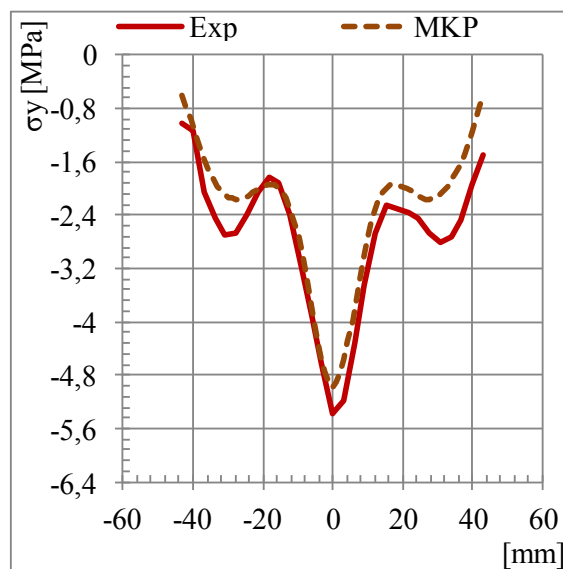
Bylo zjištěno, že rozdíly v průběhu prvního hlavního napětí σ_1 vůči numerickému řešení jsou způsobeny nesymetrií izoklinných křivek u modelu kruhového disku (vliv uložení disku v zatěžujícím přípravku).

Model prstence

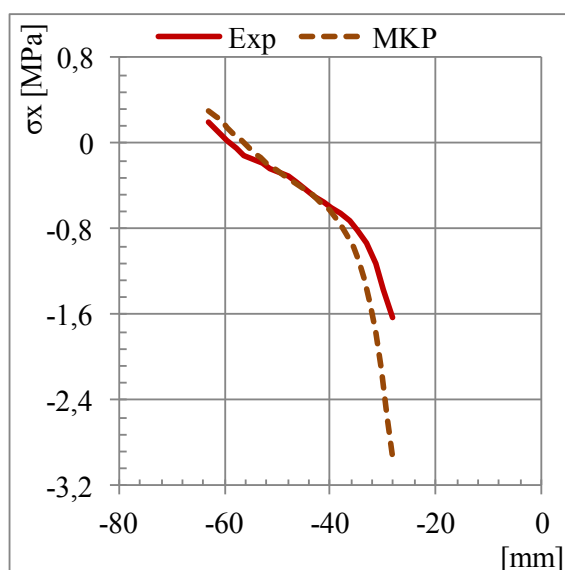
V řezu A-A u modelu prstence (viz obr. 3.2) byly zjištěny průběhy složek napětí σ_x a σ_y , které jsou vyobrazeny v grafu 6.5 a grafu 6.6. Tytéž složky jsou uvedeny v grafu 6.7 a grafu 6.8 pro řez B-B.



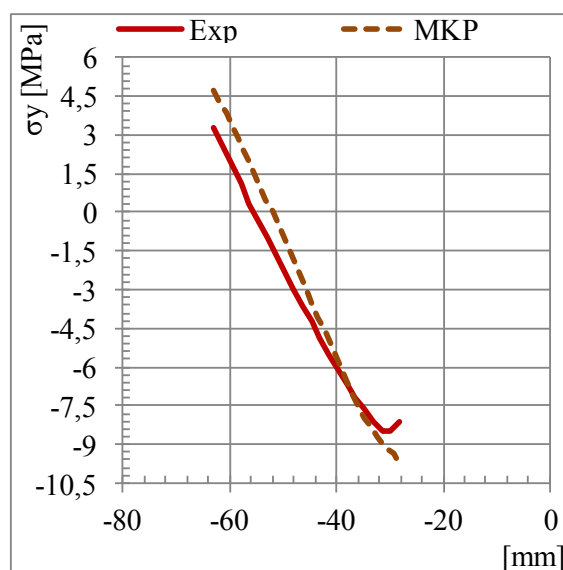
graf 6.5 Složka napětí σ_x v řezu A-A (prstenec).



graf 6.6 Složka napětí σ_y v řezu A-A (prstenec).



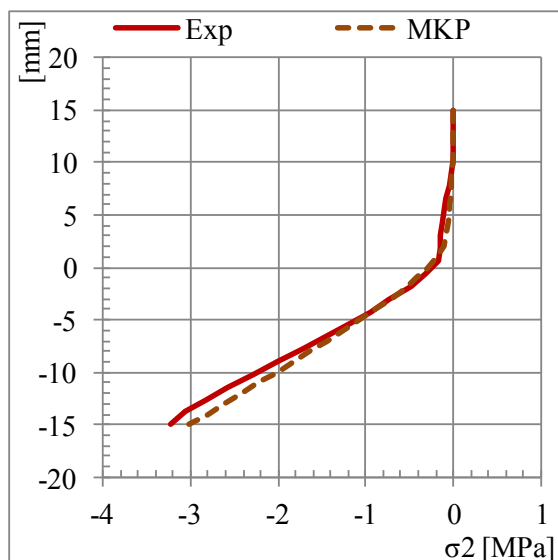
graf 6.7 Složka napětí σ_x v řezu B-B (prstenec).



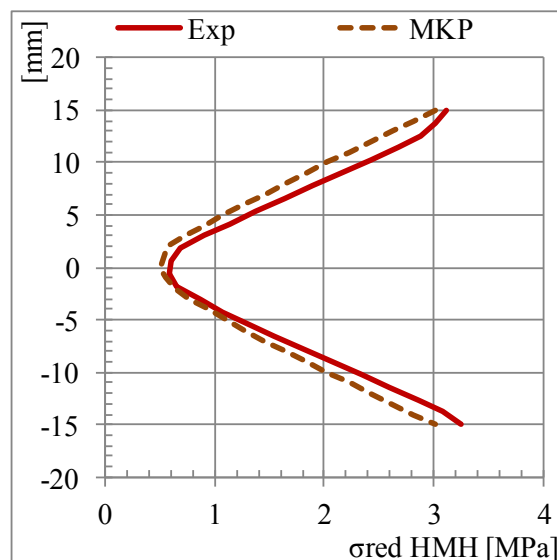
graf 6.8 Složka napětí σ_y v řezu B-B (prstenec).

Model tvarového nosníku

Průběhy izoklinných křivek se u nosníku stanovovaly velmi obtížně. Nosník při měření nebyl celým svým objemem v zorném poli polariskopu. Došlo proto k vyřešení jen jeho středové části – oblast vetknutí se neanalyzovala. Průběhy druhého hlavního napětí σ_2 a redukovaného napětí σ_{red}^{HMH} jsou uvedeny pro řez A-A (viz obr. 3.3) v grafu 6.9 a v grafu 6.10.



graf 6.9 Složka napětí σ_2 v řezu A-A (nosník).



graf 6.10 Redukované napětí σ_{red}^{HMH} v řezu A-A (nosník).

Z uvedených diagramů je patrná kvalitativní shoda mezi experimentálním a numerickým řešením, případně řešením analytickým. Kvantitativní shoda je v některých případech o něco horší.

Odchyłky od numerického řešení mohou být způsobeny mnoha faktory. Již samotné měření a způsob uložení (symetrie zatížení a kolmé uspořádání optických členů) může zavést do řešení chybu. Vykreslování izoklinných a izochromatických křivek včetně obrysu závisí na zručnosti uživatele a má přímý vliv na výsledné řešení. Samotná zvolená metodika výpočtu je zdrojem nepřesností. Jde především o výpočet částečných řádů a parametrů úhlů z izochromatických a izoklinných křivek v bodech výpočetní mřížky.

Přes všechny zmíněné aspekty, které řešení ovlivňují, lze říci, že navržený algoritmus je použitelný pro řešení rovinných úloh v transmisní fotoelasticitě.

7 ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývala řešením napjatosti v rovinných průsvitných tělesech metodou transmisní fotoelasticimetrie. V úvodní části byla v nezbytné míře popsána historie metody, metodika měření a teorie fotoelasticimetrie. V práci byly použity dvě sestavy polariskopu, tzv. polariskop pro rovinnou polarizaci a polariskop pro kruhovou polarizaci. Výstupem fotoelasticimetrických měření jsou tzv. izoklinné a izochromatické křivky. Z izoklinných křivek lze jistými postupy určit směry hlavních napětí v tělese. Izochromatické křivky probíhají místy o stejné úrovni napětí, definované jako rozdíl hlavních napětí: $(\sigma_1 - \sigma_2)$. Aby bylo možné určit jednotlivá hlavní napětí samostatně je potřeba provést další výpočty, pomocí některé z metod pro separaci napětí.

Metoda rozdílu smykových napětí slouží k určení jednotlivých složek tenzoru napjatosti a k jejímu aplikování postačí fotografie izochromatických a izoklinných křivek. Klasický způsob zpracování je zdoluhavý a vyžaduje překreslování zmíněných křivek na průhledné fólie, což proces komplikuje. Na pracovišti Ústavu pružnosti a pevnosti VŠB - TU v Ostravě byl v rámci této práce vyvinut program, který klasický způsob zpracování zjednodušuje a urychluje. Princip jeho činnosti byl v práci stručně uveden na příkladu stlačovaného prstence. Program byl vytvořen za pomoci softwaru MATLAB. Uživatel na počátku určí obrys modelu a průběhy izochromatických a izoklinných křivek pomocí bodů. Křivky jsou poté proloženy Bézierovou křivkou. Dalším krokem bylo vytvořit mřížku uvnitř modelu, v jejíchž uzlových bodech je nutné určit velikosti rozdílu hlavních napětí a směr napětí σ_1 vůči kladnému směru vodorovné osy. Způsob tvorby rastru bodů bylo omezeno podmínkou, která vyžadovala, aby každý nově vzniklý bod měl ve svém bezprostředním okolí alespoň jeden již dříve vytvořený bod. Vyhodnocení metodou rozdílu smykových napětí probíhalo automaticky v celé ploše vzorku. S velkou hustotou bodů je klasický ruční způsob vyhodnocení po celém modelu nereálný. Algoritmus byl dále ověřen na modelu kruhového disku, který byl diametrálně stlačován a na modelu tvarového nosníku namáhaného ohybem.

Výsledky obdržené experimentálním řešením za pomoci vytvořeného programu byly pro několik řezů v kapitole 6 porovnány s numerickým řešením MKP, případně s řešením analytickým. Ze srovnání je patrná dobrá kvalitativní shoda. Odchyłky experimentálního řešení od výpočetních mohou být způsobeny mnoha faktory, např. nesymetrickým uložením v zatěžujícím přípravku, nepřesným určením průběhu izochromatických

a izoklinných křivek. K nepřesnosti může dojít i na počátku výpočtu, který je vždy na volné hraně modelu. Metoda rozdílu smykových napětí vyžaduje znalost průběhů smykových napětí ve třech rovnoběžných řezech vzdálených o konstantní hodnotu. Zmíněná podmínka komplikuje vyhodnocení v blízkosti obrysu modelu. Obrysu se lze přiblížit snížením velikosti kroku mřížky. Doporučený postup je začít s větším krokem sítě a postupně jej snižovat, při současném sledování průběhů výsledků.

Hlavním přínosem diplomové práce je skutečnost, že se podařilo automatizovat klasický způsob zpracování snímků izochromatických a izoklinných křivek a samotnou metodu rozdílu smykových napětí. Určování průběhů křivek je možné automatizovat. V současné době se rozvíjí tzv. digitální fotoelasticimetrie, která plně využívá možností digitálního zpracování obrazů, a která je použitelná i při řešení dynamických problémů. Fotoelasticimetrie je unikátní metoda v oblasti nedestruktivního vyšetřování zbytkových napětí v plastových materiálech. Její problematika byla rozšířena i na analýzu napětí v oblasti velkých plastických deformací, tzv. fotoplasticimetrie. Zmíněné aplikace mohou být předmětem pro další podrobnější studium.

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Františku Fojtíkovi, Ph.D. za pomoc při měřeních a za cenné rady, které přispěly k vylepšení práce.

Rád bych poděkoval také Ing. Petru Ferfeckému, Ph.D. za čas, jenž mi při konzultacích věnoval. Pan Ferfecki mi byl nápomocen při řešení problémů spojených s vytvářením vyhodnocovacích programů.

Dále děkuji rodině za podporu při studiu.

8 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] PAŠKA, Zbyněk. *Analýza zbytkových napětí v plastech*. Ostrava, 2013. Bakalářská práce. VŠB- Technická univerzita Ostrava. Vedoucí práce Fojtík F.
- [2] FROCHT, M. M. and M. M. LEVEN. THE WESTINGHOUSE RESEARCH LABORATORIES. *Photoelasticity: The Selected Scientific Papers of M. M. Frocht*. First edition. Exeter: A. Wheaton and Co., 1969. Library of Congress Catalog Card No. 68 - 57890.
- [3] MILBAUER, Miloš a Miroslav PERLA. *Fotoelasticimetrické přístroje a měřící metody*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959, 471 s. Sekce technická.
- [4] MACURA, Pavel. *Experimentální metody v pružnosti a plasticitě*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2001, 107 s. ISBN 80-7078-934-4.
- [5] TREBUŇA. *Princípy, postupy, prístroje v metode photostress*. Košice: Strojnícka fakulta TU v Košiciach, 2006, 360 s. Edícia vedeckej a odbornej literatúry. ISBN 80-8073-670-7.
- [6] LENERT, Jiří. *Úvod do metody konečných prvků*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 1999, 110 s. ISBN 80-7078-686-8.
- [7] ASUNDI, Anand Krishna. *MATLAB® for Photomechanics: A Primer*. Printed in The Netherlands: Elsevier, 2002. ISBN 0 08 044050-9.
- [8] FRANKOVSKÝ, Peter. *Metóda photostress a možnosti jej aplikácie pri statickej a dynamickej napäťovej analýze*. Košice, 2014. Habilitačná práca. Technická univerzita v Košiciach.
- [9] RAMESH, K. *Digital Photoelasticity Advanced Techniques and Applications*. Softcover reprint of the original 1st ed. 2000. Berlin: Springer Verlag, 2013. ISBN-13: 978-3-642-64099-5.
- [10] HALLIDAY, David, RESNICK a WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Brno: VUTIUM, 2000. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 80-214-1869-9. (pozn. kapitola 34)
- [11] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Encyklopedie fyziky* [online]. 2006 [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/>

- [12] OPTICAL FILTERS. Polarizers [online]. 2015 [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: <http://www.opticalfiltersusa.com/polarisers.html>
- [13] SINGH, Devraj. *Fundamentals of Optics*. New Delhi: Prentice-Hall of India Pvt Ltd., 2010, 448 s. ISBN 978-81-203-4189-0.
- [14] BEDNÁR, Jozef, Vladimír KOLÁŘ, Ladislav MEJZLÍK, Rudolf PLECHATA a Jaroslav ŠLECHTA. *Experimentální pružnost*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1970, 269 s. DT 539.31.
- [15] TREBUŇA, František a František ŠIMČÁK. *Príručka experimentálnej mechaniky*. Košice: TopoPress, vydavateľstvo a tlačiareň, 2007, 1 526 s. Vedeckej a odbornej literatúry. ISBN 970-80-8073-816-7.
- [16] KHAN, Akhtar S a Xinwei WANG. 2001. *Strain Measurements and Stress Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 247 s. ISBN 01-308-0076-7.
- [17] MILBAUER, Miloš. *Fotoelasticimetrie a její použití v praxi*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1953, 140 s.
- [18] AMERICAN POLARIZERS, Inc. Quarter Wave & Half Wave Retarder [online]. 2008 [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: <http://www.apioptics.com/quarter-wave-retarders.html>
- [19] FERNÁNDEZ, M Solaguren-Beascoa, J M Alegre CALDERÓN, P M Bravo DÍEZ a I I Cuesta SEGURA. 2010-1-1. Stress-separation techniques in photoelasticity: a review. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. **45**(1): 1-17. DOI: 10.1243/03093247JSA583. ISSN 0309-3247. Dostupné také z: <http://sdj.sagepub.com/lookup/doi/10.1243/03093247JSA583>
- [20] SOLAGUREN-BEASCOA FERNÁNDEZ, M. A Metrological Study of the Shear Difference Technique in Photoelasticity. *Experimental Techniques*. 2013, s. 10. DOI: 10.1111/ext.12065. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/ext.12065>
- [21] LENERT, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. 2. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009, 174 s. ISBN 978-80-248-1959-4.
- [22] TREBUŇA, František. *Pružnosť a pevnosť I*. III. upravené vydanie. Košice: Elfa, s.r.o. Košice, 2005, 236 s. Edícia vedeckej a odbornej literatúry. ISBN 80-7099-736-2.

- [23] VADOVIČ, Fridrich. 1965. Contribution to the analysis of errors in photoelasticity. *Experimental Mechanics*. **5**(12): 413-416. DOI: 10.1007/BF02327431. ISSN 0014-4851. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/BF02327431>
- [24] MACURA, Pavel a František FOJTÍK. 2012. Experimentální a analytické řešení tenzorového napětíového pole vetknutého nosníku. *Jemná mechanika a optika*. **57**(04): 100-105. ISSN 0447-6441. Dostupné také z: <http://jmo.fzu.cz/>
- [25] MSC SOFTWARE. MSC Product Portfolio [online]. 2015 [cit. 2015-04-29]. Dostupné z: <http://www.mssoftware.com/msc-product-portfolio>
- [26] EL-SHAMY, A. Eman. 2013. Photoelastic analysis of Discontinuous Infilled Frame at Loss of Soil Support. *Life Science Journal.*, **10**(01): 1766-1778. ISSN 1097-8135. Dostupné z: <http://www.lifesciencesite.com/ljsj/life1001/>
- [27] SADD, Martin H. 2009. *Elasticity: theory, applications, and numerics*. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier/AP, xv, 536 s. ISBN 978-0-12-374446-3.

9 SEZNAM PŘÍLOH

Příloha **A**: Grafické znázornění smykového napětí τ_{xy} , hlavních napětí σ_1 , σ_2 a ekvivalentního napětí σ_{red}^{HMH} u modelu prstence (viz obr. 9.1 až obr. 9.4).
Výsledky byly získány počítačovým zpracováním fotoelasticimetrických snímků.

Příloha **B**: Grafické znázornění složek napětí σ_x , σ_y , druhého hlavního napětí σ_2 a ekvivalentního napětí σ_{red}^{HMH} u modelu disku (viz obr. 9.5 až obr. 9.8).
Výsledky byly získány počítačovým zpracováním fotoelasticimetrických snímků.

Příloha **C**: Grafické znázornění složek napětí σ_x , σ_y , smykového napětí τ_{xy} a prvního hlavního napětí σ_1 u modelu tvarovaného nosníku (viz obr. 9.9 až obr. 9.12).
Výsledky byly získány počítačovým zpracováním fotoelasticimetrických snímků.